

N° d'ordre : 7640

Thèse

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD XI

Spécialité : Dynamique des Fluides et des Transferts

par

Othman BOUZI

INSTABILITÉS 3D DE CONVECTION THERMOCAPILLAIRE EN ZONE-FLOTTANTE

Soutenue le 8 octobre 2004 devant la commission d'examen :

M. Pierre-Antoine BOIS	Président
M. Eric CHÉNIER	Examineur
Mme. Claudine DANG VU-DELCARTE	Directeur de thèse
M. Daniel HENRY	Rapporteur
M. Gérard LABROSSE	Examineur
M. Georgy LEBON	Rapporteur

Remerciements

Lorsque j'ai commencé ma thèse en mécanique des fluides, j'avais à l'esprit l'image d'une science vieillotte, où tout était déjà fait. Le seul domaine de la physique intéressant était pour moi la physique de l'infiniment petit et de l'infiniment grand. Je me demandais alors ce que j'allais bien pouvoir faire. En acceptant d'être mon Directeur de Thèse, Claudine Dang Vu a pris un grand risque. Elle a réussi par son humanité, sa pédagogie, sa ténacité et sa rigueur scientifique à me montrer tout l'attrait de ce domaine. Un simple merci ne suffirait pas à lui exprimer ma gratitude.

Les membres de mon jury seront certainement les seuls à avoir lu mon manuscrit dans sa totalité. Qu'ils en soient consolés : l'écriture de ce manuscrit m'a aussi fait souffrir. Un grand merci à Daniel Henry et Georgy Lebon pour leur lecture plus que minutieuse et leurs nombreuses remarques qui m'ont été fort utiles. Merci à Pierre-Antoine Bois d'avoir accepté la délicate tâche de présider mon jury.

Je tiens à remercier Patrick Le Quéré de m'avoir accueilli au LIMSI et donné les moyens de mener à bien ce travail. J'ai profité et abusé de cours particuliers auprès de Gérard Labrosse, Guillaume Kasperski et Eric Chénier dont j'admire la patience quand il m'arrivait de leur poser des questions de néophyte, parfois triviales, voire idiotes. Merci pour les discussions fructueuses que nous avons eues.

A Olivier Daube, Claire Vasilevic et les enseignants de l'UFR de Sciences et Technologie de l'Université d'Evry pour m'avoir permis de terminer cette thèse en m'acceptant comme ATER, j'exprime ma reconnaissance. Ils m'ont donné l'occasion d'apprendre que rien ne vaut le contact avec des étudiants pour remettre en cause ses propres connaissances.

Merci à l'Institut du Développement des Ressources en Informatique Scientifique (CNRS) et au Centre de Ressources Informatique de l'Université de Paris Sud XI pour la mise à disposition de ressources que je ne m'imaginai pas utiliser il y a quelques années, et à leur personnel toujours disponible pour dépanner des aléas informatiques.

A Sébastien, Ehouarn, Yannick, Linda, Piotr, Kasia et Vladimir qui ont d'abord dû me supporter, qu'ils sachent qu'ils m'ont beaucoup appris lors de nos échanges scientifiques, culturels et culinaires.

Je n'oublie pas Rémi Brageu qui m'a montré les subtilités de la présentation graphique, Mouaouia Firdaouss pour les intéressants débats d'idées, Valérie Bhoyroo pour qui les problèmes administratifs n'en sont pas, Patrick Paroubek qui sait communiquer autrement qu'avec une machine, plus généralement les membres de CIGITA, du groupe Direction et tous ceux que j'oublie qui ont contribué par leur bonne humeur et sympathie à rendre mon séjour au LIMSI agréable.

Je tiens à remercier mes parents et grands parents pour m'avoir donné cette soif de découverte et de connaissance, merci de m'avoir poussé jusqu'ici. Merci à David pour m'avoir fait découvrir l'informatique et les joies de l'optimisation, les nuits passées dans la cave ont porté leurs fruits. Mention spéciale à Gaëlle qui a partagé mes joies et mes peines, j'essaierai d'être moins insupportable à l'avenir. A Pierre et Benoît qui m'ont permis de m'évader de l'enfer parisien. A Yolande et Jean-Claude qui ont déniché les trop nombreuses fêtes dans se manuskri, la nouvelle génération leur réserve encore du travail.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Notations et Conventions	xi
1 Introduction	1
2 Modèle et Méthodes numériques	15
2.1 Modèle de la zone-flottante	15
2.1.1 Géométrie	15
2.1.2 Paramètres physiques	16
2.1.3 Les équations du modèle	16
2.1.3.1 Equations dimensionnelles	16
2.1.3.2 Une singularité au point triple	17
2.1.3.3 Paramètres adimensionnels	17
2.1.4 Système linéarisé	20
2.2 Méthodes numériques	23
2.2.1 Discrétisation	23
2.2.1.1 Discrétisation spatiale	23
2.2.1.2 Discrétisation temporelle	23
2.2.2 Découplage vitesse-pression	24
2.2.3 Méthode de résolution du système linéaire par évolution temporelle	24
2.2.4 Calculer le mode propre dominant	27
2.2.5 Bilan d'énergie	28
2.2.5.1 Formulation naturelle	28
2.2.5.2 Bilans pour une bifurcation stationnaire	30
2.2.5.3 Bilans moyens pour une perturbation instationnaire	31
2.2.5.4 Evaluation de l'erreur	34
2.2.5.5 Formulation centrifuge	35
3 Stabilité linéaire des écoulements stationnaires 2D vis-à-vis de perturbations 2D et 3D	37
3.1 Validation des codes sur la demi-zone	37
3.2 La zone-flottante	40
3.2.1 Convergence spatiale et régularisée des écoulements 2D stationnaires	40
3.2.1.1 Convergence du champ stationnaire à $(Pr, Ma) = (10^{-2}, 100)$	41
3.2.1.2 Convergence du champ stationnaire à $(Pr, Ma) = (10^2, 60000)$	41
3.2.2 Etude du mode 0	44
3.2.2.1 Prandtl=0.002, transition par bifurcation de Hopf	48
3.2.2.2 Structure des écoulements oscillants à $Pr = 0.002$	53
3.2.2.3 Prandtl=0.01, transition par bifurcation fourche	56
3.2.2.4 Prandtl=0.02, restabilisation à haut Ma	58
3.2.2.5 Prandtl=0.06, transition par bifurcation de Hopf	63
3.2.2.6 Structure des écoulements oscillants à $Pr=0.06$	66
3.2.2.7 Prandtl=20, transition par bifurcation de Hopf	66
3.2.2.8 Structure des écoulements oscillants à $Pr = 100$	69
3.2.2.9 Discussion	71

3.2.3	Etude du mode 1	71
3.2.4	Etude du mode 2	76
3.2.4.1	Prandtl=0.01, transition par bifurcation fourche	81
3.2.4.2	Prandtl=0.06, transition par bifurcation fourche	84
3.2.4.3	Prandtl=0.2, transition par bifurcation fourche	89
3.2.5	Discussion	93
4	Zone-flottante 3D	97
4.1	Méthode numérique	97
4.2	Validation	97
4.3	Écoulements à faibles nombres de Prandtl	98
4.4	Écoulements à grands nombres de Prandtl	98
5	Localisation des lieux sensibles de l'écoulement par le système adjoint	103
5.1	Historique	103
5.2	Comparer deux perturbations	104
5.3	Décomposition dans la base propre	105
5.4	Calcul du système adjoint analytique	106
5.4.1	"Adjoint" de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big _{\mathbf{u}_0}$	109
5.4.2	Système adjoint	110
5.5	Évaluation de la contribution du premier mode propre	111
5.5.1	Perturbation ponctuelle en température	111
5.5.2	Perturbation en vitesse	111
5.6	Discrétisation	112
5.6.1	Validation	113
5.6.2	Test de la perturbation ponctuelle en température sur un champ stationnaire	114
5.6.3	Cas d'une bifurcation stationnaire (valeur propre réelle)	115
5.6.4	Dépendance du calcul de l'intégrale avec le maillage	118
5.6.5	Cas d'une bifurcation instationnaire (valeur propre avec partie imaginaire non nulle)	120
5.6.6	Test d'une perturbation, "gaussienne", en température sur un champ stationnaire	124
5.6.7	Test d'une perturbation, "gaussienne", en vitesse sur un champ stationnaire	126
5.6.8	Discussion	129
5.7	Sensibilité en fonction du nombre de Prandtl	129
5.7.1	$Pr \in [0.001; 0.0034]$, bifurcation de Hopf	129
5.7.2	$Pr \in [0.0035, 0.007]$, bifurcation fourche	129
5.7.3	$Pr \in [0.008, 0.0315]$, bifurcation fourche	130
5.7.4	$Pr \in [0.019, 0.0312]$, restabilisation via une bifurcation fourche	131
5.7.5	$Pr \in [0.04, 0.1]$, bifurcation de Hopf après la restabilisation	132
5.7.6	$Pr \in [10, 100]$, bifurcation de Hopf	133
5.7.7	Discussion	133
6	Conclusion et perspectives	135
A	Opérateurs en coordonnées cylindriques	137
B	Fonction de courant en géométrie cylindrique axisymétrique bidimensionnelle	139
B.1	Généralités	139
B.2	Géométrie cartésienne	140
B.3	Géométrie cylindrique axisymétrique bidimensionnelle	140
B.3.1	Formulation I	140
B.3.2	Formulation II	141
B.3.3	Discussion	142
C	Méthodes spectrales	143
D	Bilans énergétiques : détail des calculs	145
D.1	Énergie cinétique	145
D.2	Énergie thermique	147
E	Résultats de convergence en maillage et régularisation de différents écoulements	149

F Seuils d'instabilité	153
G Méthode d'Arnoldi	155
Références	157

Table des figures

1.1	Schémas de procédés de croissance cristalline.	2
1.2	Configuration schématique de la zone-flottante	3
1.3	Schéma de la technique "needle-eye" pour la zone-flottante par Ratnieks <i>et al.</i> [87]	3
1.4	Configuration schématique de la demi-zone	5
1.5	Coupe d'un cristal de GaSb conçu par zone-flottante en microgravité, d'après Cröll <i>et al.</i> [24]	6
2.1	Configuration géométrique de la zone-flottante	16
3.1	Seuil d'instabilité du mode 1 à $Pr = 0.02$ en fonction du paramètre de régularisation n	38
3.2	Seuil d'instabilité du mode 2 à $Pr = 0.02$ en fonction du paramètre de régularisation n	38
3.3	Comparaison en demi-zone avec la perturbation de Wanschura <i>et al.</i> [109] à $Pr = 0.02$ et $k = 2$	39
3.4	Maxima du champ stationnaire à $Pr = 10^{-2}$ et $Ma = 100$ en fonction de n et de $N_r \times N_z$	42
3.5	Maxima du champ stationnaire à $Pr = 10^2$ et $Ma = 60000$ en fonction de n et de $N_r \times N_z$	43
3.6	Seuils d'instabilité des modes 0, 1 et 2 en fonction de Pr	45
3.7	Pulsation critique de la bifurcation de Hopf des modes 0, 1 et 2	45
3.8	Diagramme de bifurcation du mode 0 pour $Pr = 0.01$	46
3.9	Seuil d'instabilité du mode 0 en fonction de Pr	46
3.10	Pulsation critique de la bifurcation de Hopf pour le mode 0	46
3.11	Détail du seuil d'instabilité du mode 0	47
3.12	Scénario de restabilisation sous-critique à $Pr = 0.03$	47
3.13	Scénario de restabilisation sur-critique à $Pr = 0.03$	47
3.14	Ma_c du mode 0, bifurcation de Hopf à faibles Pr , et son approximation linéaire	48
3.15	ω_c du mode 0, bifurcation de Hopf à faibles Pr , et son approximation linéaire	48
3.16	Champ stationnaire à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$	49
3.17	Vitesse de la perturbation dominante à $Pr = 0.002$, $Ma = 130$ et $k = 0$	49
3.18	Température de la perturbation dominante à $Pr = 0.002$, $Ma = 130$ et $k = 0$	50
3.19	Vitesse axiale et température à la surface libre de la perturbation à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$	50
3.20	Détails du champ de vorticité de l'écoulement stationnaire à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$	51
3.21	Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.002$, $k = 0$	52
3.22	Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.002$, $k = 0$	52
3.23	Distributions spatiales $\langle \dot{\epsilon}_c \rangle$, $\langle i_u^4 \rangle$, $\langle i_u^2 \rangle$ et $\langle i_u^3 \rangle$ à $Pr = 0.002$, $Ma = 130$, $k = 0$	54
3.24	Fonction de courant sur une demi-période et son détail à $Pr = 0.002$, $Ma = 140$	55
3.25	Température sur une demi-période à $Pr = 0.002$, $Ma = 140$	55
3.26	Vorticité sur une demi-période à $Pr = 0.002$, $Ma = 140$	55
3.27	Champ stationnaire et sa perturbation dominante à $Pr = 0.01$, $Ma = 106$ et $k = 0$	57
3.28	Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.01$, $k = 0$	58
3.29	Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.01$, $k = 0$	58
3.30	Distributions spatiales $i_u^3 + i_u^5$, $i_u^3 + i_u^4$, i_u^4 et $\dot{\epsilon}_c$. $Pr = 0.01$, $Ma = 106$, $k = 0$	59
3.31	Champ stationnaire et sa perturbation dominante à $Pr = 0.02$, $Ma = 10000$ et $k = 0$	61
3.32	Détails du champ de vorticité de l'écoulement stationnaire à $Pr = 0.02$ et $Ma = 10000$	62
3.33	Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.02$, $k = 0$	62
3.34	Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.02$, $k = 0$	62
3.35	Vitesse axiale et température de la perturbation à la surface libre à $Pr = 0.02$ et $Ma = 10000$	63
3.36	Champ stationnaire à $Pr = 0.06$ et $Ma = 270000$	64
3.37	Perturbation dominante à $Pr = 0.06$, $Ma = 270000$ et $k = 0$	64
3.38	Termes naturels et centrifuges du taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.06$, $k = 0$	65
3.39	Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique. $Pr = 0.06$	65
3.40	Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique. $Pr = 0.06$	65

3.41	Distributions spatiales $\langle i_\theta^1 \rangle$, $\langle \dot{e}_\theta \rangle$ et $\langle i_\theta'^1 \rangle$. $Pr = 0.06$, $Ma = 270000$, $k = 0$	66
3.42	Fonction de courant sur une demi-période et son détail à $Pr = 0.06$, $Ma = 280000$	67
3.43	Température sur une demi-période à $Pr = 0.06$, $Ma = 280000$	67
3.44	Vorticité sur une demi-période à $Pr = 0.06$, $Ma = 280000$	67
3.45	Champ stationnaire à $Pr = 20$ et $Ma = 62100$	68
3.46	Perturbation dominante à $Pr = 20$, $Ma = 62100$ et $k = 0$	69
3.47	Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique. $Pr = 20$, $k = 0$	70
3.48	Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique. $Pr = 20$, $k = 0$	70
3.49	Distributions spatiales $\langle i_\theta^2 \rangle$, $\langle \dot{e}_\theta \rangle$ et $\langle i_\theta'^1 \rangle$. $Pr = 20$, $Ma = 62100$, $k = 0$	70
3.50	Fonction de courant sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 100$, $Ma = 60000$	72
3.51	Température sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 100$, $Ma = 60000$	72
3.52	Vorticité sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 100$, $Ma = 60000$	72
3.53	Seuil d'instabilité du mode 1 en fonction de Pr	73
3.54	Pulsation critique de la bifurcation de Hopf pour le mode 1 en fonction de Pr	73
3.55	Composantes du champ stationnaire à $Pr = 20$ et $Ma = 37500$	74
3.56	Perturbation dominante à $Pr = 20$, $Ma = 37500$ et $k = 1$	75
3.57	Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique. $Pr = 20$, $k = 1$	76
3.58	Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique. $Pr = 20$, $k = 1$	76
3.59	Perturbation de mode 1 sur une demi-période à $Pr = 20$ et $Ma = 37500$ sur la surface libre	77
3.60	Coupe de la perturbation de mode 1 sur une demi-période à $Pr = 20$ et $Ma = 37500$	78
3.61	Coupe axiale de la perturbation de mode 1 sur une demi-période à $Pr = 20$ et $Ma = 37500$	79
3.62	Distributions spatiales $\langle i_\theta^1 \rangle$, $\langle \dot{e}_\theta \rangle$ et $\langle i_\theta'^1 \rangle$. $Pr = 20$, $Ma = 37500$, $k = 1$	79
3.63	Seuil d'instabilité du mode 2 en fonction de Pr	80
3.64	Pulsation critique de la bifurcation de Hopf pour le mode 2 en fonction de Pr	80
3.65	Seuil d'instabilité du mode 2 en fonction de Pr	80
3.66	Champ stationnaire et perturbation dominante à $Pr = 0.01$, $Ma = 16$ et $k = 2$	82
3.67	Développée de la perturbation dominante sur la surface libre pour $Pr = 0.01$, $Ma = 16$ et $k = 2$	83
3.68	Termes naturels et centrifuges du taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.01$ et $k = 2$	83
3.69	Distributions spatiales i_u^4 , \dot{e}_c , i_u^4 , i_u^2 , et i_u^3 . $Pr = 0.01$, $Ma = 16$	85
3.70	Termes naturels du taux de croissance de l'énergie cinétique pour la demi-zone par Wanschura <i>et al.</i> [109]. $Pr = 0.02$	85
3.71	Composantes de la perturbation dominante de mode 2 à $Pr = 0.02$ et $Ma = 33$	86
3.72	Champs stationnaires de demi-zone à $Ma = 42$ et de la zone-flottante à $Ma = 33$ pour $Pr = 0.02$	86
3.73	Profils sur la surface libre en demi-zone ($Ma = 42$) et en zone-flottante ($Ma = 33$) à $Pr = 0.02$	87
3.74	Champ stationnaire et sa perturbation dominante à $Pr = 0.06$, $Ma = 280$ et $k = 2$	88
3.75	Perturbation dominante développée sur la surface libre à $Pr = 0.06$, $Ma = 280$ et $k = 2$	89
3.76	Termes naturels et centrifuges du taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.06$ et $k = 2$	89
3.77	Distributions spatiales i_u^4 , \dot{e}_c , i_u^4 , i_u^2 , et i_u^5 . $Pr = 0.06$, $Ma = 280$ et $k = 2$	90
3.78	Champ stationnaire et sa perturbation dominante à $Pr = 0.2$, $Ma = 3200$ et $k = 2$	92
3.79	Perturbation dominante développée sur la surface libre à $Pr = 0.2$, $Ma = 3200$ et $k = 2$	93
3.80	Termes naturels et centrifuges du taux de croissance de l'énergie cinétique. $Pr = 0.2$ et $k = 2$	93
3.81	Distribution spatiale i_u^4 , \dot{e}_c , i_u^4 , i_u^2 , et i_u^1 . $Pr = 0.2$, $Ma = 3200$ et $k = 2$	94
4.1	Cœur des cellules des écoulements 3D à $Pr = 0.01$, $Pr = 0.06$ et $Pr = 0.2$	99
4.2	Historique du mode 2 à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$	99
4.3	Cœur des cellules de l'écoulement 3D bifurqué à $Pr = 0.01$	100
4.4	Diagramme spatio-temporel de la température sur la surface libre. $Pr = 100$ et $Ma = 35000$	100
4.5	Coupe axiale de la température sur une demi-période à $Pr = 100$ et $Ma = 35000$	101
4.6	Coupe axiale de la perturbation et de l'écoulement 3D sur une demi-période à $Pr = 100$	101
5.1	Schéma de la démarche adoptée dans ce chapitre	113
5.2	Champ stationnaire à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$	115
5.3	Perturbation dominante de mode 0 du champ stationnaire à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$	116
5.4	Premier mode propre de perturbation adjoint \tilde{u}_1 du champ stationnaire à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$	116
5.5	Sensibilités numériques en température à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$	117
5.6	Courbe des valeurs du tableau 5.2 et son approximation linéaire	118
5.7	Représentation de δ_{i,i_p} pour $N_r = 20$ et $i_p = 9$	118
5.8	Distance entre $I(r)$ et $I(N_r, i_p) / \max_k I(N_r, k)$ en fonction de r_{i_p} pour $N_r = 50, 70$ et 100	119

5.9 $I(N_r, i_p) / \max_k I(N_r, k)$ en fonction de r_{i_p} pour $N_r=50, 70$ et 100 120

5.10 Sensibilités physiques en température à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$ 121

5.11 Champ stationnaire à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$ 122

5.12 Module de la perturbation dominante de mode 0 du champ stationnaire à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$ 122

5.13 Premier mode propre de perturbation adjoint \tilde{w}_1 du champ stationnaire à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$ 122

5.14 Sensibilités numériques en température à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$ 123

5.15 Sensibilités physiques en température à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$ 123

5.16 Historique d'une composante de l'écoulement en un point 123

5.17 Courbe des valeurs du tableau 5.3 et son approximation linéaire 124

5.18 Composante θ de la perturbation $\delta T(20, 30)$ 125

5.19 Courbe des valeurs du tableau 5.4 126

5.20 Sensibilités numériques en température gaussienne à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$ 126

5.21 Représentation de la vitesse de la perturbation $\delta U(20, 30)$. $\alpha = -100$ 127

5.22 Détail de la figure 5.21 127

5.23 Sensibilités numériques en vitesse gaussienne à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$ 128

5.24 Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle pour $Pr \in [0.001, 0.0034]$. 130

5.25 Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle pour $Pr \in [0.0035, 0.007]$. 130

5.26 Fonction de courant de l'écoulement stationnaire à $Pr = 0.004$ et $Ma = 355$ 131

5.27 Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle pour $Pr \in [0.008, 0.0315]$. 131

5.28 Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle pour $Pr \in [0.019, 0.0312]$. 132

5.29 Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle pour $Pr \in [0.04, 0.1]$. . . 132

5.30 Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle pour $Pr \in [10, 100]$ 133

E.1 Maxima du champ stationnaire à $Re = 10^{-2}$ et $Ma = 10^{-2}$ ($Pr = 1$) en fonction n et $N_r \times N_z$. 149

E.2 Maxima du champ stationnaire à $Re = 10^{-2}$ et $Ma = 10^2$ ($Pr = 10^4$) en fonction n et $N_r \times N_z$. 150

E.3 Maxima du champ stationnaire à $Re = 10^2$ et $Ma = 10^{-2}$ ($Pr = 10^{-4}$) en fonction n et $N_r \times N_z$ 151

E.4 Maxima du champ stationnaire à $Re = 10^2$ et $Ma = 10^2$ ($Pr = 1$) en fonction n et $N_r \times N_z$. . . 152

Liste des tableaux

2.1	Coefficients d'adimensionnement en fonction de la vitesse de référence	19
3.1	Seuil de stabilité du mode 2 à $Pr = 0.02$ pour $n = 15$ en fonction du nombre de mailles	38
3.2	Seuil de stabilité du mode 2 à $Pr = 0.02$ en fonction du nombre de mailles par Wanschura <i>et al.</i> [109]	38
3.3	Paramètres des écoulements stationnaires à étudier en maillage et régularisation	40
3.4	Paramètres effectifs obtenus <i>a fortiori</i> aux paramètres du tableau 3.3	41
4.1	Résultats pour différentes grilles, pour $Re = 3500$ et $Pr = 0.01$	98
5.1	Comparaison des valeurs propres dominantes des opérateurs \mathcal{L} et $\tilde{\mathcal{L}}$	114
5.2	Coefficients de réponse a_1^{temp} et a_1^{num} aux points de perturbations (stationnaire)	117
5.3	Coefficients de réponse a_1^{temp} et a_1^{num} aux points de perturbations (oscillant)	121
5.4	Coefficients de réponse a_1^{temp} et a_1^{num} aux points de perturbations (gaussien en température)	125
5.5	Coefficients de réponse a_1^{temp} et a_1^{num} aux points de perturbations (gaussien en vitesse)	128
F.1	Seuils d'instabilité du mode 0	153
F.2	Seuils d'instabilité du mode 1	154
F.3	Seuils d'instabilité du mode 2	154

Notations et Conventions

Symboles latins

$A = H/R$	rapport de forme
c_p	capacité calorifique massique
$\dot{\epsilon}_c$	distribution spatiale du taux de croissance de l'énergie cinétique de la perturbation dominante
\dot{E}_c	taux de croissance de l'énergie cinétique de la perturbation dominante
$\dot{\epsilon}_\theta$	distribution spatiale du taux de croissance de l'énergie thermique de la perturbation dominante
\dot{E}_θ	taux de croissance de l'énergie thermique de la perturbation dominante
\vec{e}_r	vecteur unitaire dans la direction r
$(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$	base en coordonnées cylindriques
$f_n(z)$	fonction de régularisation
H	hauteur de la zone-flottante
Ma	nombre de Marangoni
n	paramètre de régularisation
$N = N_r \times N_z$	nombre total de mailles en 2D
N_r	nombre de mailles dans la direction r
Pr	nombre de Prandtl
$Q(z)$	flux thermique latéral
R	rayon de la zone-flottante
Ra	nombre de Rayleigh
t	temps
T	température du fluide
T_0	température de fusion
$\vec{u} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\varphi + w\vec{e}_z$	vitesse de la perturbation
$\vec{\tilde{u}} = \tilde{u}\vec{e}_r + \tilde{v}\vec{e}_\varphi + \tilde{w}\vec{e}_z$	vitesse adjointe
$\vec{U} = U\vec{e}_r + V\vec{e}_\varphi + W\vec{e}_z$	vitesse de l'écoulement
\underline{x}	nombre complexe conjugué de x

Symboles grecs

β	coefficient d'expansion volumique
γ	coefficient thermique de tension superficielle
$\delta_{\dot{e}_c}$	erreur relative commise sur le taux de croissance de l'énergie cinétique
$\delta_{\dot{e}_\theta}$	erreur relative commise sur le taux de croissance de l'énergie thermique
$\delta_{i,j}$	symbole de Kronecker
$\delta(x)$	fonction de Dirac
Θ	écart adimensionné de température à la température de fusion
$\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$	diffusivité thermique
λ	conductivité thermique
λ_i, λ_1	i ^{ème} valeur propre, valeur propre dominante
μ	viscosité dynamique
$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	viscosité cinématique
ρ, ρ_0	densité, densité de référence
σ, σ_0	contrainte capillaire à la surface libre, contrainte capillaire de référence à la surface libre
$\sigma_i = \Re(\lambda_i)$	partie réelle de la i ^{ème} valeur propre
τ	période d'oscillation
ψ	fonction de courant de Stokes de la perturbation 2D
$\tilde{\psi}$	fonction de courant de Stokes adjointe 2D
Ψ	fonction de courant de Stokes de l'écoulement 2D
$\omega_i = \Im(\lambda_i)$	partie imaginaire de la i ^{ème} valeur propre
$\vec{\Omega} = \Omega_r \vec{e}_r + \Omega_\varphi \vec{e}_\varphi + \Omega_z \vec{e}_z$	rotationnel de l'écoulement

Autres symboles

$\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_1$	i ^{ème} vecteur propre, vecteur propre dominant
$\mathbb{U} = (U, V, W, \Theta)$	coordonnées de la zone-flottante adimensionnée dans l'espace des phase
$\mathbf{u} = (u, v, w, \theta)$	coordonnées de la perturbation de la zone-flottante adimensionnée dans l'espace des phase

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre introductif est destiné à donner un bref aperçu des enjeux et études de la croissance cristalline. Bien que relevant de la structure microscopique de la matière, les mécaniciens des fluides y voient leur intérêt en étudiant l'écoulement d'un fluide dont le moteur se trouve sur la surface libre. La structure microscopique des cristaux est ici intimement liée aux mouvements macroscopiques du fluide. De plus, la prise en compte de solutés, de champs électromagnétiques et de la thermodynamique des changements de phase dans les modèles de plus en plus complexes fait entrevoir la richesse physique de la croissance cristalline par le couplage entre les échelles macroscopiques et microscopiques.

Ce travail fait suite à deux précédentes thèses, de Chénier [16] et Kasperski [51], sur la convection thermocapillaire en zone-flottante menées au LIMSI. Leur revue s'arrête en 1999, c'est pourquoi nous ne verrons dans cette section qu'un résumé de ce qui a été fait jusqu'à cette date, et ensuite une brève revue, un peu plus détaillée, de ce qui a été fait depuis.

Les débuts de la production de cristaux.

La matière qui nous entoure se présente sous des formes plus ou moins organisées. Les gaz et liquides sont communément des formes désorganisées de la matière, exception faite des super-fluides et condensats de Bose-Einstein. Les solides se trouvent sous des formes totalement désorganisées (solides amorphes comme les verres) à très organisées (cristaux comme le diamant). Connus pour leur propriétés mécaniques en terme de dureté, les cristaux comme le rubis ou le saphir ont servi en horlogerie comme support d'axe ou comme verre de protection de montre. Le phénomène de cristallisation était déjà connu de Fahrenheit (1724), et c'est avec Verneuil (1890) que la production de rubis industriel a commencé, par la mise au point d'une technique de croissance cristalline par fusion dans la flamme. De la poudre d'oxyde d'aluminium (Al_2O_3) est projetée sur un support en passant par une flamme qui est un mélange d'hydrogène / oxygène pour donner une surface de croissance au cristal : la graine. La surface sur laquelle la poudre en fusion est déposée est ensuite élargie jusqu'à la taille désirée pour le cristal final. Les constituants de la poudre fondue se réorganisent selon la structure du substrat qu'est le cristal. Ceci donne, au bout d'une journée, des cristaux de 1cm de diamètre et 2cm de long. C'est, ni plus ni moins, le procédé naturel de formation des cristaux, à la différence que ce dernier dure des milliers d'années. La poudre d'aluminium pure est utilisée pour produire des cristaux transparents, mais en ajoutant des impuretés on obtient des cristaux colorés. L'ajout d'oxyde de chrome donne du rubis, l'ajout de titane et de fer donne du saphir bleu.

S'inspirant du procédé de Verneuil, d'autres personnes ont mis au point des procédés qui portent leur nom : Tammann (1914) connu aussi sous le nom de Bridgman vertical (1923), Czochralski (1918), Bridgman horizontal (1923) et Kyropoulos (1926). Les figures 1.1 donnent une idée de la configuration géométrique de chaque procédé ; la flèche sans indication donne le sens de croissance du cristal. Le procédé de Tammann ressemble à celui de Verneuil, mais utilise un creuset dans lequel le liquide versé devrait se solidifier sous forme cristalline à partir du fond du creuset où se trouve une graine. La variante horizontale a été adaptée par Bridgman ; le cristal croît horizontalement et sa surface de croissance est accessible à l'expérimentateur qui peut la contrôler par chauffage local. Le procédé de Czochralski consiste à faire croître le cristal en le tirant à partir d'un creuset. La vitesse de croissance est contrôlée par la vitesse ascensionnelle du cristal. Contrairement au procédé de Czochralski, celui

de Kyropoulos fait croître le cristal dans le creuset. Les procédés de Czochralski et Kyropoulos sont respectivement des procédés de Verneuil et Tammann inversés.

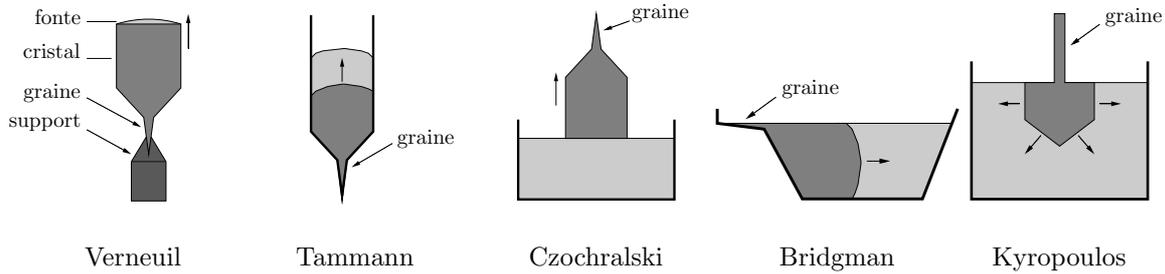


FIG. 1.1 – Schémas de procédés de croissance cristalline.

La motivation, pour le développement d'autant de procédés, était non seulement d'étudier les propriétés des cristaux eux-mêmes, mais aussi de mesurer la vitesse de cristallisation des métaux. Le cristal le plus connu, en application "électronique" à l'époque, était le sulfure de plomb (PbS), ou galène. C'est à partir de la seconde guerre mondiale, quand la technologie militaire a eu besoin de cristaux de quartz pour des applications optiques, ou encore de cristaux de germanium semi-conducteur développés par Karl Lark-Horovitz pour la protection électrique des radars micro-ondes, que la production industrielle de cristaux a reçu l'aide des gouvernements impliqués dans cette guerre. Cet essor s'est poursuivi avec la découverte, dans les laboratoires Bell, du transistor qui allait remplacer les lampes à vide. Depuis, la croissance cristalline sert à la fabrication de semi-conducteurs, cristaux à scintillation pour la détection de divers rayons (X, γ , α ...), cristaux optiques, lasers et la bijouterie. La production était estimée à 20000t en 1999 alors qu'elle n'était que de 5000t en 1979 [92, 115].

Aujourd'hui, les cristaux pour semi-conducteurs, principalement du silicium (98% des composants actuels) et dans une moindre mesure du germanium et étain gris, sont produits par la méthode de Czochralski. Par exemple, l'entreprise Silicon Valley Microelectronics Inc. (<http://www.svmi.com/>) commercialise des galettes de silicium d'un diamètre de 25mm à 300mm. La nouvelle génération de cristaux de silicium produits par la méthode de Czochralski atteignent une taille de 400mm de diamètre sur 1m à 2m de long. Les cristaux sont débités en galettes polies qui serviront à la fabrication de puces électroniques.

La course à la miniaturisation pour intégrer un nombre croissant de composants électroniques dans les objets quotidiens exige de la matière première de qualité croissante. La taille des circuits approche la taille caractéristique de groupes d'atomes. Dès lors, on ne peut plus négliger une impureté ou un défaut dans la structure cristalline du circuit. Ces défauts pourraient détériorer les propriétés du cristal et deviennent vite un obstacle au fonctionnement de l'électronique. C'est pourquoi, aujourd'hui, le principal enjeu, en croissance cristalline, est l'obtention d'une bonne homogénéité des propriétés électriques, magnétiques et de concentration en dopant. Un inconvénient inhérent à la méthode de Czochralski est l'utilisation d'un creuset dont les éléments peuvent polluer le cristal. Pour y pallier, l'idée est de revenir au procédé du type Verneuil qui ne fait pas entrer en jeu de creuset.

La zone-flottante : avantages et inconvénients

La zone-flottante [78] est un procédé qui s'inspire de la méthode de Verneuil. Ce procédé, qui est une adaptation du procédé de purification du germanium inventé par Pfann [83] en 1951, a été développé par Theuerer [107] en 1952. La méthode de croissance cristalline a pour objectif de faire passer à l'état monocristallin le matériau polycristallin d'un barreau vertical auquel (presque) rien ne sera ajouté. Le matériau du barreau polycristallin est transféré sur le barreau monocristallin via la zone-flottante. La figure 1.2 illustre la configuration géométrique de la zone-flottante. Cette zone-flottante est une partie du barreau qui a été liquéfiée par chauffage latéral. Le barreau est bien sûr fixé à ses extrémités et la zone-flottante est maintenue par les forces capillaires qui s'exercent à la surface du liquide. Le chauffage latéral induit un gradient de température sur la surface libre. Ce gradient provoque des inhomogénéités de tension de surface, mettant le fluide en surface en mouvement, en

général des points chauds vers les points froids, c'est la convection thermocapillaire.

La convection thermocapillaire est caractérisée par un nombre adimensionnel, c'est le nombre de Marangoni, noté Ma . Ce nombre est le rapport de la vitesse de convection thermocapillaire à la surface libre sur la vitesse de diffusion thermique. Il est en général dépendant de l'échelle de température sur la surface libre. Un autre nombre adimensionnel important dans ce mémoire est celui de Prandtl qui est le rapport de la vitesse de diffusion de quantité de mouvement sur la vitesse de diffusion thermique.

Quand le chauffage est symétrique par rapport au plan médian et azimuthalement invariant, deux cellules de convection apparaissent de part et d'autre du plan médian. Le plan médian est orthogonal à l'axe du barreau et est équidistant des fronts solides. Lorsque l'écoulement dans la zone-flottante est soumis à la gravité, la force d'Archimède intervient, mais peut être considérée comme négligeable devant la force thermocapillaire dans le cas de zones-flottantes de faible hauteur. La source de chaleur se déplace du bas vers le haut, liquéfiant progressivement la partie supérieure du barreau qui est polycristalline et permet la resolidification du matériau sur la partie inférieure du barreau selon sa structure monocristalline. Le chauffage latéral du barreau est produit soit par un fil chauffant, soit par des lampes halogènes et un jeu de miroirs, soit par un chauffage par induction radio-fréquence pour les matériaux métalliques. Ce dernier procédé autorise la fabrication de barreaux de grands diamètres ($> 100\text{mm}$) car la géométrie de la zone-flottante s'éloigne fortement (*c.f.* figure 1.3) de celle de deux barreaux coaxiaux de diamètres sensiblement égaux. Sur Terre, les configurations de chauffage latéral par rayonnement limitent la longueur caractéristique de la zone-flottante à l'ordre du centimètre. La hauteur maximale de la zone-flottante dépend de l'équilibre entre la pression hydrostatique et la tension de surface alors que le diamètre, s'il est trop grand, peut entraîner la solidification du cœur de la zone. En augmentant le flux de chaleur, pour éviter la solidification du cœur de la zone, on augmente également la hauteur de la zone. Cröll *et al.* [24] ont obtenu en microgravité des hauteurs de zone-flottante de 13mm pour de l'arséniure de gallium alors que sur Terre cette hauteur ne dépasse pas 8mm.

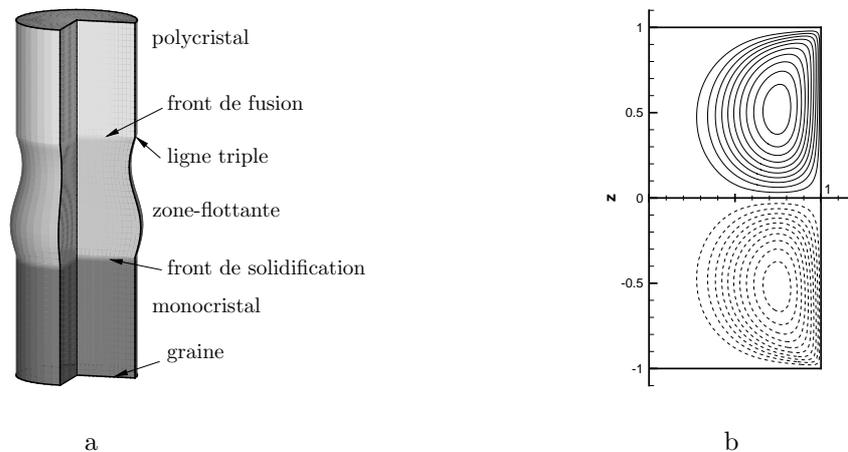


FIG. 1.2 – a) Configuration géométrique schématique de la zone-flottante, le chauffage latéral n'est pas représenté. b) Cellules de convection représentées par la fonction de courant, l'écoulement est ici bidimensionnel

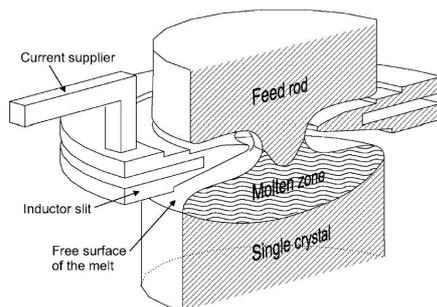


FIG. 1.3 – Schéma de la technique "needle-eye" pour la zone-flottante par Ratnieks *et al.* [87]

La zone-flottante est utilisée en physique du solide pour étudier les propriétés électriques, magnétiques et mécaniques de la matière sous une forme cristalline [72, 54]. Elle permet de fabriquer un cristal décrit par Lee et Chen [65] et impossible à faire par la méthode de Czochralski. En effet, lors de son refroidissement, le cristal de BaTiO_3 transite par une température critique à 1440°C et peut perdre sa propriété de phase ferroélectrique ; l'utilisation d'un solvant en zone-flottante permet au matériau de ne pas atteindre cette température critique, et rend possible l'élaboration d'un tel cristal. Elle facilite également la cristallisation d'un matériau qui serait réactif, comme le silicium, à l'état liquide avec un creuset, ou qui a un haut point de fusion (supérieur à 1415°C pour le silicium et le titanate de baryum ou 2650°C pour le SrZrO_3). Cependant il est à noter que la taille caractéristique des cristaux produits en laboratoire est de 1cm de diamètre sur 10cm de long alors que les cristaux de silicium industriels ont 10cm de diamètre et 1m de long [87].

On peut également produire du silicium cristallin dopé par une technique de zone-flottante, et qui peut paraître en contradiction avec le procédé lui-même ; ce procédé est utilisé en métallurgie pour purifier des barres métalliques. Les impuretés se concentrent dans la zone liquide et finissent à une extrémité du barreau. Le fluide de la zone-flottante n'est alors plus pur mais doit être considéré comme un fluide binaire. On est donc en présence de convection thermocapillaire, thermosolutale et éventuellement thermogravitationnelle. Les expérimentateurs qui désirent doper un cristal de silicium doivent maîtriser l'environnement gazeux de l'expérience pour contrôler l'absorption de dopant sous forme gazeuse de manière à obtenir la concentration désirée en dopant dans le cristal de silicium.

Le principal défaut dans les cristaux obtenus par cette technique est la formation de striations durant leur croissance. Ces striations sont dues à la microségrégation de dopant ou de constituants d'alliages qui conduisent à la non-homogénéité des propriétés électriques et magnétiques dans le cristal. Elles apparaissent avec une transition vers l'instationnarité de l'écoulement de la zone fluide [45], ceci aussi bien sur terre [93] qu'en micro-gravité [30, 24, 94]. D'autres défauts, de nature structurelle, ne seront pas abordés en détail.

Pour une zone-flottante donnée, c'est-à-dire pour un fluide à nombre de Prandtl donné et tous paramètres géométriques fixés, l'apparition de l'instationnarité (typiquement des oscillations) ne dépend que du nombre de Marangoni. Au delà d'un nombre de Marangoni particulier, appelé nombre Marangoni critique ou seuil, et noté Ma_c , l'écoulement perd sa stabilité et évolue vers un autre état stable ou oscillant. C'est le comportement de ce nombre Ma_c en fonction de la nature du fluide et différents paramètres géométriques des expériences qui intéresse les chercheurs. Un paramètre géométrique apparaît souvent, c'est le facteur d'aspect $\Gamma = H/R$ qui est égal au rapport de la hauteur H de la zone-flottante sur son rayon R .

La convection de Marangoni et la demi-zone

Pour étudier l'apparition des écoulements oscillants dans un fluide soumis à une contrainte capillaire gérée par la température, les expérimentateurs et théoriciens ont mis au point le modèle dit de demi-zone. Ce modèle, schématisé sur la figure 1.4, consiste à placer un liquide entre deux barreaux solides isothermes de températures différentes. Pour limiter la convection naturelle, le barreau supérieur est plus chaud que le barreau inférieur. L'avantage est que l'échelle de température sur la surface libre est connue, contrairement à la zone-flottante pour laquelle c'est le flux de chaleur à la surface libre qui est imposé.

Ce qu'observent les expérimentateurs

Il est acquis, avec l'observation des striations, que pour des hauteurs de zone-flottante inférieures à 22mm [3], le phénomène de convection dominant, pour des matériaux à nombre de Prandtl compris entre 0.01 et 12, est dû aux forces thermocapillaires et non pas à la force d'Archimède. Le nombre de Prandtl caractérise l'importance relative de la vitesse de diffusion de la quantité de mouvement et de la vitesse de diffusion thermique. Typiquement, une huile ou du miel ont un grand nombre de Prandtl car ils sont visqueux et ne conduisent pas nécessairement bien la chaleur. Les métaux liquides ont un faible nombre de Prandtl car ils conduisent très bien la chaleur et sont, en général, beaucoup moins visqueux que de l'huile.

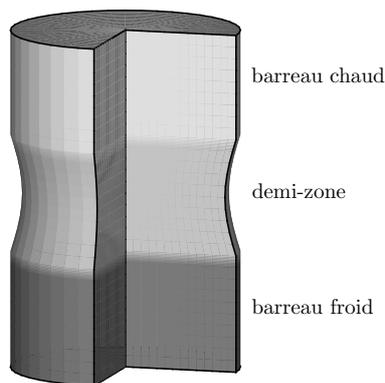


FIG. 1.4 – Configuration géométrique schématique de la demi-zone

L'observation des écoulements est relativement aisée lorsque le fluide est transparent. En disposant de particules de faible taille (de l'ordre du dixième de millimètre), il est possible, à l'aide d'une caméra, d'observer leurs mouvements et donc de remonter aux lignes de courant (par exemple avec du nitrate de sodium NaNO_3 [84]). L'inconvénient est que ceci ne concerne que les liquides transparents qui ont un grand nombre de Prandtl alors que les liquides à faible nombre de Prandtl sont opaques. Comme les premiers sont plus visqueux et conduisent moins bien la chaleur que les seconds, les écoulements résultants ne sont pas influencés par les mêmes mécanismes physiques. Les fluides transparents n'ont donc pas les mêmes propriétés que les métaux liquides qui sont concernés par la croissance cristalline, et pourtant il faut bien parvenir à observer ce qui se passe dans la zone-flottante.

Plusieurs méthodes, destructives et non destructives, sont employées pour observer les interfaces de croissance cristalline, lieu de naissance des striations. Cette observation est nécessaire pour contrôler la croissance du cristal, car les surfaces de croissance concaves favorisent l'apparition de défauts [52, 58]. On peut couper longitudinalement le cristal pour observer le front de solidification après l'avoir marqué lors de la croissance du cristal par une impulsion thermique ou des vibrations contrôlées. Ces techniques nécessitent la présence de dopant ou de liquides binaires, elles ont été utilisées par Dold *et al.* [29]. Parmi les méthodes d'observation non destructives, une méthode optique pour observer la ligne triple est utilisée par Schweizer *et al.* [94] et Sumiji *et al.* [101]. Sumiji *et al.* [102] utilisent cette technique avec deux caméras pour observer, dans une demi-zone de silicium (10mm de haut sur 9mm de diamètre) dans un four à miroirs, les fluctuations de température. Avec des longueurs d'onde plus courtes que la lumière visible, la radioscopie du front solide en temps réel est lourde à mettre en œuvre et ne peut être appliquée que sur des matériaux de faible densité ou sur de petits volumes. Campbell et Koster [11] ont démontré la possibilité d'observer, avec cette technique, un front solide de croissance d'un cristal d'antimoniure d'indium (InSb), cependant ces observations sont uniquement bidimensionnelles. Des informations tridimensionnelles sur les fronts solides sont obtenues avec des longueurs d'ondes infrarouges [46], mais il faut, dans ce cas, que les matériaux utilisés laissent passer ces longueurs d'ondes comme l'arsénure de gallium (GaAs) ou le phosphure de gallium (GaP). Inatomi *et al.* [46] ont couplé les mesures optiques avec des mesures thermiques et ont mis en évidence la dépendance des mouvements de la ligne triple avec la température. Dold *et al.* [29] ont utilisé une méthode d'observation du front solide par ultrasons dont la résolution spatiale est comprise entre $\pm 5\mu\text{m}$ et $\pm 35\mu\text{m}$ pour les fréquences respectives de 0.1Hz et 1Hz.

Les coupes des cristaux, comme on peut le voir sur la figure 1.5, permettent d'observer les défauts de croissance et la répartition inhomogène des constituants d'alliages ou du dopant dans le cristal. Pour réduire la microségrégation (*i.e.* les striations) et l'intensité des inhomogénéités en dopant, les expérimentateurs utilisent des champs magnétiques pour contrôler les écoulements de la zone-flottante de liquides métalliques.

Cröll et Benz [26] ont fait une importante synthèse sur l'utilisation de champs magnétiques statiques pour contrôler les écoulements en zone-flottante. L'utilisation de champs magnétiques est plus aisée dans les configurations de chauffage latéral que dans celles de chauffage par induction ($\simeq 100\text{mT}$). Dans cette dernière technique, le champ magnétique influe sur le chauffage qui n'est alors plus permanent. Il est difficile, dans ce cas, d'évaluer l'importance relative de chaque phénomène. Pour étudier l'effet d'un champ magnétique sur les écoulement en zone-flottante, les expérimentateurs n'animent en général pas les barreaux d'un mouvement de rotation. La rotation des barreaux nourriciers et monocristallins est utilisée pour stabiliser la zone-flottante et ainsi réduire, voire éliminer, les oscillations de

température [20]. La rotation confine l'écoulement vers la surface libre [33] et s'oppose à l'écoulement thermocapillaire par pompage d'Eckman.

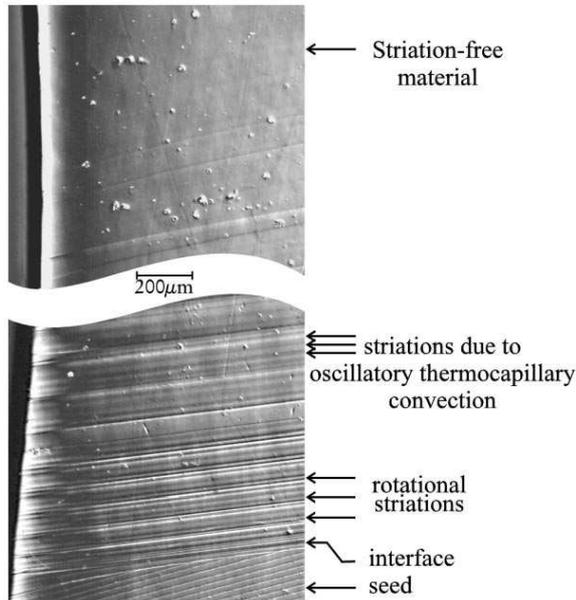


FIG. 1.5 – Coupe d'un cristal de GaSb conçu par zone-flottante en microgravité, d'après Cröll *et al.* [24]. Les striations peuvent apparaître par plusieurs mécanismes.

Les striations disparaissent en appliquant un champ magnétique statique axial de 0.2T à une zone-flottante de 8mm de diamètre de silicium dopé au phosphore [23]. Néanmoins, une macroségrégation radiale du dopant apparaît après mesure de la résistance électrique entre différents points du cristal [27]. Les cellules convectives de l'écoulement sont poussées vers la surface libre, ce qui expliquerait la macroségrégation. Pour diminuer cet effet, il suffirait donc d'augmenter le champ magnétique pour confiner encore plus les cellules convectives vers la surface libre. Ces cellules peuvent encore osciller, ce qui provoque des striations à la périphérie du barreau. En augmentant le champ magnétique à une valeur de 5T, Cröll *et al.* [25] observent que la macroségrégation radiale diminue fortement et les écoulements oscillants n'ont pas été observés sur la surface libre. Malgré cela, des striations sont apparues après un certain temps, mais pas pour toutes les séries d'expériences menées. Ces striations sont attribuées à un autre phénomène : la convection thermoélectromagnétique. Un gradient de température peut engendrer un courant électrique (effet Seebeck) à condition que le pouvoir thermoélectrique du milieu (le coefficient Seebeck) soit élevé. L'interaction de ce courant avec le champ magnétique axial engendre un fort écoulement azimutal et provoque les striations. Le four utilisé par Cröll *et al.* [25] était placé entièrement entre les aimants supraconducteurs produisant le champ magnétique. Au delà de 3T, ceci avait un effet particulier sur les ampoules servant à chauffer la zone-flottante. Le filament, traversé par un courant électrique, subissait une force de Lorentz qui pouvait le faire toucher le verre, et donc détruire l'ampoule.

L'application d'un champ magnétique transverse tournant a pour effet d'augmenter la vitesse azimutale et ainsi transformer un écoulement oscillant en un écoulement bidimensionnel axisymétrique plus régulier. Dold *et al.* [28] ont mené des expériences terrestres sur des zones-flottantes de silicium dont le barreau nourricier a été dopé avec de l'antimoine, de l'arsenic ou du phosphore. Un champ magnétique tournant homogène de fréquence 50Hz et d'une intensité maximale de 7.5mT a été appliqué sur une zone-flottante de 14mm de diamètre. L'atténuation des striations est nette à partir de 3.75mT. Pour une intensité de 7.5mT, la distribution radiale de dopant est plus importante et homogène que sans champ magnétique. Une macroségrégation axiale apparaît néanmoins à partir du moment où le champ magnétique tournant est appliqué. La concentration en dopant augmente avec le temps et l'état d'équilibre n'a pu être observé car l'échantillon est trop court. La forme de l'interface de croissance a également été modifiée. Elle passe d'une forme asymétrique concave, reflétant l'asymétrie du four, à une forme plus symétrique et aplatie quand un champ magnétique tournant est appliqué. Pour une zone-flottante de 8mm de diamètre, aucune striation n'a été observée en essayant toutes les valeurs de champ magnétique disponibles. Ceci s'explique par la convection thermocapillaire qui est moins forte pour des zones-flottantes de grand diamètre. De plus, l'effet du champ magnétique

tournant (*i.e.* la force de Lorentz) est plus important sur des zones de grande hauteur.

Un autre moyen de rendre l'écoulement plus stable, au sens des striations, est paradoxalement de le secouer. Anilkumar *et al.* [1] ont appliqué une vibration axiale de très faible amplitude ($100\mu\text{m}$) à une demi-zone d'huile de silicone et observé que l'écoulement était contrecarré par la vibration et pouvait même s'inverser avec l'augmentation de la fréquence de la vibration. Grugel *et al.* [38] ont poursuivi l'expérience avec une zone-flottante d'un alliage de NaNO_3 et $\text{Ba}(\text{NaNO}_3)_2$ qui a aussi été soumise à une vibration de $10\mu\text{m}$ d'amplitude. Les coupes transverses de ce cristal qui a crû avec vibration et sans vibration révèlent que la distribution est bien plus homogène quand la zone-flottante est soumise à des vibrations que quand elle n'y est pas soumise.

Plus classiquement, la transition vers l'instationnarité de l'écoulement est observable sur les variables de vitesse et de température. Cette dernière est préférée aux autres car plus accessible. Sa mesure peut se faire par l'utilisation d'un ou plusieurs thermocouples, ou aussi, comme Takagi *et al.* [104], avec un thermomètre à radiations. Ces derniers ont étudié la transition d'un écoulement thermocapillaire d'une demi-zone d'étain de 1.2mm de rayon (Pr varie entre 0.012 et 0.008 pour des températures respectivement entre 570K et 770K) et de rapport d'aspect $\Gamma = 2.02$ vers un écoulement oscillant. Pour repérer le seuil de transition vers un écoulement oscillant, la différence de température entre les deux barreaux est augmentée. De plus la température des deux barreaux varie aussi par une dérive thermique globale du dispositif expérimental. Les oscillations à la surface sont apparentes pour $Ma = 43.3$ et ont une fréquence de 0.08Hz. Pour retrouver un état stationnaire, l'écart de température entre les deux barreaux est réduit, et la température des deux barreaux diminue elle aussi, mais pas au rythme de leur précédente augmentation en température. Les oscillations de l'écoulement disparaissent pour $Ma = 58.9$ (sans préciser la fréquence). Aucune explication n'a été avancée pour comprendre cette différence de seuil. Il se pourrait que les températures moyennes du fluide pour chacun des deux seuils étant différentes, le fluide dans ces deux cas aurait un nombre de Prandtl différent, ce qui expliquerait cette différence de seuil pour un même fluide. Ceci étant, un résultat intéressant de cette expérience est que la mesure de la température par un thermocouple à travers la surface libre modifie nettement la fréquence d'oscillation de la température à la surface. Sans introduction du thermocouple, la fréquence mesurée avec le thermomètre à radiation est de 0.08Hz. Avec l'introduction du thermocouple, la mesure de la fréquence avec le thermocouple et avec le thermomètre à radiation est de 1.6Hz et avec une amplitude plus forte par rapport à la mesure précédente sans thermocouple. Le thermocouple donne donc la bonne mesure, mais perturbe l'écoulement de manière non négligeable.

La détection du seuil peut aussi se faire en observant la surface, à condition que celle-ci soit exempte d'impuretés le plus souvent dues à l'oxydation du liquide. Yang et Kou [113] cherchent expérimentalement, en demi-zone, le seuil de transition vers un écoulement oscillant pour de l'étain à $Pr = 0.013$ et pour des rapports d'aspect proches de $\Gamma = 2$. L'expérience est particulièrement soignée car la surface n'est pas oxydée, rendant la détection des oscillations plus aisée. Le seuil de transition vers un écoulement oscillant se situe à $Ma_c = 194 \pm 14$. Une formule empirique donnant la valeur du seuil en fonction du nombre de Prandtl, compris entre 0.01 et 100, est obtenue à partir des données collectées dans les articles de Cröll *et al.* [21, 22, 24] et Müller et Rupp [77]. Aucune indication n'est donnée sur la nature du mode le plus déstabilisant.

Preisser *et al.* [84] ont mené une expérience en gravité terrestre, dont l'influence est limitée, avec une demi-zone de NaNO_3 qui possède un nombre de Prandtl égal à 8.9. Les auteurs ont trouvé une loi empirique donnant le mode azimutal m de la perturbation dominante en fonction du rapport d'aspect Γ de la demi-zone : $m\Gamma = 2$. La perturbation est oscillante et mène l'écoulement vers un état oscillant en faisant apparaître une onde tournante. Le rapport d'aspect n'est pas le seul facteur qui agit sur le seuil de stabilité de la demi-zone. Masud *et al.* [75] ont mis en évidence, pour de grands nombres de Prandtl, la dépendance du seuil avec le volume de la demi-zone pour un rapport d'aspect constant.

Le rapport de volume S , qui est égal au rapport entre le volume de liquide dans la demi-zone et le volume du cylindre droit entre les deux barreaux, est alors un autre paramètre important.

Toujours à haut nombre de Prandtl (huiles de silicone à $Pr = 16.0$, $Pr = 28.1$ et $Pr = 68.4$ à 25°C), Ueno *et al.* [108] étudient en laboratoire une configuration de demi-zone de rapport de volume aussi proche que possible de l'unité pour différents rapports d'aspect Γ (entre $\Gamma = 0.30$ et $\Gamma = 2.40$) et mettent en évidence l'existence d'un régime turbulent. L'écoulement est matérialisé grâce à des

particules de polystyrène de $20\mu\text{m}$ de diamètre et observé par deux caméras. L'une observe le fluide à travers un des barreaux en saphir, donc transparent, et l'autre observe la surface libre. Les effets de la gravité sont négligés dans leur étude, la contrainte thermocapillaire étant plus importante que la force d'Archimède. Dans ce cas, le calcul du nombre de Reynolds critique ne peut pas être fait en considérant une viscosité constante car l'écart de température (jusqu'à 100K) entre les deux fronts solides est trop important. La viscosité est alors évaluée en fonction de la température moyenne des deux fronts solides par une formule empirique. Le nombre d'onde m de la structure de l'écoulement après la première bifurcation est dépendant du rapport d'aspect et est en accord avec l'observation de Preisser *et al.* [84]. Le seuil d'instabilité est lui aussi dépendant du rapport d'aspect.

Les modèles et résultats numériques...

... en demi-zone

Les modèles, aussi riches soient-ils, ne pourront tenir compte de tous les phénomènes physiques présents dans les systèmes que nous étudions. Nous proposons de donner un aperçu des modèles et principaux phénomènes qui ont été modélisés. La majorité des résultats publiés à ce jour portent sur la configuration de demi-zone.

Un modèle de demi-zone infiniment longue de surface libre plane indéformable a été étudié analytiquement par Xu et Davis [112]. Leur modèle prévoit que le mode 0 ou 1 est le plus déstabilisant à haut Prandtl. Bien évidemment ce ne seront pas nécessairement ces modes qui seront les plus déstabilisants en zone-flottante ou en demi-zone, car les fronts solides renvoient l'écoulement de la surface libre vers l'axe du cylindre, et changent ainsi la structure de l'écoulement.

Wanschura *et al.* [109] étudient les mécanismes provoquant la première instabilité de l'écoulement stationnaire axisymétrique bidimensionnel de la demi-zone indéformable pour les faibles nombres de Prandtl ($Pr \ll 1$) et pour les hauts nombres de Prandtl (en particulier $Pr = 4$); le rapport d'aspect est égal à 1, bien qu'une étude succincte ait été menée à $Pr = 0.02$ pour des rapports d'aspect Γ allant de 0.50 à 3.00. Les écoulements sont approchés par une méthode de collocation de Chebyshev dans la direction radiale et par des différences finies du second ordre dans la direction axiale. Le champ stationnaire est calculé par une méthode de Newton-Raphson alors que les perturbations 3D sont obtenues par stabilité linéaire et le seuil trouvé évalué par la méthode de Brent [9]. Une analyse en énergie complète l'étude pour obtenir une interprétation sur l'origine de la déstabilisation. Deux mécanismes de déstabilisation ont été mis en évidence, un pour les faibles nombres de Prandtl et l'autre pour les hauts nombres de Prandtl. Pour les nombres de Prandtl inférieurs à 0.05 et pour tous les rapports d'aspect entre 0.50 et 3.00, une analyse locale du transfert d'énergie du champ stationnaire vers la perturbation conduit à situer la source de l'instabilité, qui est d'origine hydrodynamique, dans la couche de cisaillement près de la surface libre. Il semble qu'à faible nombre de Prandtl le nombre d'onde le plus instable dépend du rapport d'aspect et vérifie la relation $m = 2/\Gamma$. Pour les nombres de Prandtl entre 0.5 et 5, une régularisation de la contrainte thermocapillaire sur la surface libre est nécessaire pour résoudre numériquement l'écoulement avec des maillages de taille raisonnable. La présence d'une singularité de vorticit   à la ligne triple nécessite l'introduction d'une fonction de r  gularisation qui module la contrainte thermocapillaire    la surface libre et agit comme un filtre ayant une longueur de coupure plus courte que celle de la m  thode de diff  rences finies utilis  e dans la direction axiale. La r  gularisation permet ainsi d'atteindre la convergence en maillage plus rapidement. La r  gularisation ne modifie que faiblement (5%) le seuil de stabilit  . Le m  canisme de d  stabilisation est diff  rent de celui trouv      faible nombre de Prandtl. Pour le rapport d'aspect Γ   gal    1, le mode le plus d  stabilisant est un mode 2. La bifurcation est une bifurcation de Hopf. Celle ci, de nature hydrothermale, provient de paires d'ondes se propageant azimutalement dont la source est le gradient de temp  rature du champ stationnaire de base. En conclusion, ni la d  formation de la surface libre, ni une gravit   r  siduelle ne sont n  cessaires pour expliquer les instabilit  s de convection thermocapillaire en demi-zone.

De m  me, Levenstam et Amberg [66] s'int  ressent aux instabilit  s hydrodynamiques de la demi-zone de rapport d'aspect $\Gamma = 1$ pour de faibles nombres de Prandtl, c'est-  -dire entre 0 et 0.01. La r  solution des   quations du mod  le se fait par une m  thode d'  l  ments finis par interpolation isoparam  trique triquadratique en espace et par une m  thode d'Euler implicite/explicite en temps. La m  thode est d'ordre 3 en espace, mais le sch  ma d'Euler utilis   n'est pas pr  cis  . Les r  sultats

présentés sont à $Pr = 0.01$ et sont valables, d'après les auteurs, de cette valeur jusqu'à $Pr = 0$. La première bifurcation trouvée est une bifurcation fourche surcritique pour un nombre de Reynolds critique égal à 1960 pour le mode 2. A la surface libre, l'écoulement azimuthal va des points froids vers les points chauds, ce qui est contraire à ce que l'on peut attendre d'une convection thermocapillaire. La tension de surface ne joue que le rôle de moteur de l'écoulement pour le champ de base et n'intervient pas dans le mécanisme de déstabilisation qui est donc purement hydrodynamique. En prenant un nombre de Prandtl nul (le champ de température est purement diffusif), le seuil est ramené à un nombre de Reynolds critique égal à 1898. Wanschura *et al.* [109] trouvent dans ce cas $Re = 1793$, et une instabilité de même type que la précédente est observée. Ceci montre que le couplage entre la température et la vitesse à la surface libre n'intervient pas dans le mécanisme de déstabilisation. Une explication de l'origine de cette instabilité est avancée avec l'évocation de la stabilité d'un anneau de vortacité constante infiniment fin étudié par Widnall et Tsai [110]. Bien que l'analogie entre les deux configurations soit ardue à cause de la présence des fronts solides et de la répartition de la vortacité, il n'en est pas moins vrai que le mode de déstabilisation prévu par la théorie de Widnall et Tsai [110] correspond à celui trouvé dans l'étude de Levenstam et Amberg [66] ainsi que la forme du tourbillon après la bifurcation. Après la transition 3D du champ axisymétrique vers un champ stationnaire 3D, ce dernier se déstabilise à son tour au delà du nombre de Reynolds critique égal à 6250 pour un nombre de Prandtl toujours égal à 0.01. Cette bifurcation est une bifurcation de Hopf surcritique de nature hydrodynamique. Les résultats de Levenstam et Amberg [66] corroborent ceux de Wanschura *et al.* [109] à faibles nombres de Prandtl.

Dans la même configuration, Shevtsova *et al.* [96] observent, avec et sans gravité, les effets d'une viscosité variable dépendant linéairement de la température et pouvant varier d'un ordre de grandeur entre deux points du fluide. L'étude se fait avec un code temporel tridimensionnel en volumes finis. La difficulté principale est de pouvoir définir les nombres de Prandtl et de Reynolds car la viscosité n'est pas constante. Le choix s'est porté sur la viscosité prise à la température du barreau le plus froid. Il y a un bon accord entre le seuil d'instabilité trouvé à $Pr = 35$ et $\Gamma = 1$ dans l'expérience de Muehlner *et al.* [76] et les simulations menées aux mêmes paramètres. De même, les ondes tournantes de mode 1 observées expérimentalement au delà du seuil sont reproduites par les simulations.

Chen et Hu [14] observent la stabilité d'une demi-zone à surface déformée, pour des nombres de Prandtl entre 1 et 100, en fonction du rapport de volume pour un rapport d'aspect égal à 1. Une stabilité linéaire 3D par la méthode Q-R est utilisée sur un écoulement 2D axisymétrique bidimensionnel calculé avec une méthode spectrale sur des polynômes de Chebyshev pour la discrétisation spatiale et par différences finies implicite/explicite pour les itérations temporelles (*c.f.* Chen et Hu [13]). Il a été mis en évidence que la demi-zone est particulièrement stable pour un rapport de volume S entre 0.75 et 0.95. Tang et Hu [106] font la même observation expérimentale et numérique pour $Pr = 105.6$, mais avec une demi-zone soumise à la gravité. Ceci en accord avec des expériences menées plus tôt par Hu *et al.* [44] et plus tard par Sumner *et al.* [103] pour une huile de silicone 5 cS (nombre de Prandtl non précisé). Le mode 1 est le plus instable pour une surface libre plane. C'est également pour des petits nombres de Prandtl ($Pr = 0.01$ et $Pr = 0.001$) que Chen *et al.* [15] s'intéressent à l'influence du rapport de volume sur les seuils pour un rapport d'aspect égal à 1 hors gravité. Les méthodes numériques sont identiques à celles de Chen et Hu [14]. Contrairement à ce qui a été observé à haut Prandtl, le seuil est peu dépendant du rapport de volume. Le mode instable pour un rapport de volume égal à 1 est $m = 2$. Sumner *et al.* [103] ont aussi fait une étude numérique de la stabilité en fonction du rapport de volume et ont trouvé des seuils plus élevés que les valeurs expérimentales. Ils en déduisent que leur modèle mathématique ne contient pas les principaux phénomènes physiques intervenant dans la demi-zone.

Lappa *et al.* [61] simulent des écoulements tridimensionnels temporels en demi-zone pour $Pr = 0.01$ avec une surface déformée statique qui vérifie l'équation de Gauss-Laplace. Une correction du critère de Wanschura *et al.* [109], qui indique quel mode sera déstabilisant, est proposée. Ce critère tient compte de la concavité ou convexité de la surface libre. Il s'agit d'une correction du facteur d'aspect se basant sur la position du centre de la cellule de convection (*c.f.* Levenstam et Amberg [66]). De plus, tous les écoulements tridimensionnels atteints après la bifurcation ont la symétrie azimuthale de leur mode propre instable. Les conclusions sur l'importance du rapport de volume sont les mêmes que celles faites par Chen *et al.* [15]. Les rapports d'aspect et de volume sont des paramètres déterminants pour les seuils de stabilité, comme Masud *et al.* [75] l'ont montré expérimentalement pour des grands

nombres de Prandtl.

Nienhüser et Kuhlmann [80] poursuivent l'étude de Wanschura *et al.* [109], et complètent celle de Lappa *et al.* [61], en faisant varier le rapport de volume du fluide et le rapport d'aspect de la demi-zone axisymétrique bidimensionnelle. Les auteurs ont pour objectif d'identifier le mode le plus déstabilisant et son seuil d'instabilité, puis de comprendre la physique de ces instabilités. Les nombres de Prandtl étudiés sont $Pr = 0.02$ et $Pr = 4$ avec et sans gravité. La résolution numérique se fait en plusieurs étapes : la forme de la surface libre est statique et imposée par la loi de Laplace-Young ; le domaine déformé est projeté sur une grille régulière et les équations de Navier-Stokes stationnaires, tenant compte de la projection, sont résolues avec des opérateurs de différences finies d'ordre 2 par une méthode de Newton-Raphson ; la stabilité linéaire est résolue par la méthode d'itérations inverses. Pour un faible nombre de Prandtl, $Pr = 0.02$, deux mécanismes de déstabilisation sont identifiés : celui mis en évidence par Wanschura *et al.* [109], alimentation de l'instabilité par le terme de cisaillement de l'écoulement de base proche de la surface libre, et un autre qui est dû à des effets centrifuges et s'apparente à l'instabilité de Taylor-Couette. Selon l'angle de contact, en gravité nulle, l'instabilité du tourbillon est favorisée aux petits angles (surface concave), et l'instabilité centrifuge est favorisée aux grands angles (surface convexe). En présence de gravité et pour des rapports d'aspect et de volume égaux à 1, le seuil est exprimé en fonction de nombre de Bond, et est minimal pour une configuration de chauffage par le haut. Dans ce cas, la déformation de la surface impose une contrainte importante sur le tourbillon qui se situe près de la paroi froide. Pour $Pr = 4$, la perturbation est hydrothermale comme l'ont montré Wanschura *et al.* [109]. Hors gravité, le mode 1 est préférentiellement sélectionné lorsque la surface est concave car la vitesse radiale de la perturbation ne s'annule pas sur l'axe, rendant plus efficace l'alimentation en énergie de la perturbation que le mode 2. Au contraire des faibles nombres de Prandtl en présence de gravité, l'instabilité est plus sensible à la force d'Archimède qu'à la déformation de la surface libre due à la gravité.

Levenstam *et al.* [67] étudient la stabilité de la demi-zone indéformable de rapport d'aspect $\Gamma = 1$ pour des nombres de Prandtl allant de 0.001 à 7, d'une part, par stabilité linéaire 3D de l'état axisymétrique bidimensionnel stationnaire obtenu par une méthode de Newton, et d'autre part, en faisant la simulation numérique directe du problème 3D. Une méthode d'éléments finis du troisième ordre a été utilisée en simulation 3D. Cette étude est particulièrement intéressante car elle inclut l'intervalle des nombres de Prandtl entre 0.07 et 0.8 qui n'a pas été abordé par Wanschura *et al.* [109]. Les instabilités trouvées sont, par nombre de Prandtl croissant, un mode 2 azimutal stationnaire, un mode 3 oscillant, un mode 2 oscillant, un mode 3 oscillant et enfin un mode 2 oscillant. Le second mode 3 oscillant est suivi de près par un mode 4 oscillant sur la même plage de nombre de Prandtl. Juste au dessus du seuil du mode 4, celui-ci domine le mode 3 oscillant dans les simulations numériques non-linéaires, l'écoulement finit par acquérir une structure de mode 4. Ils ont également montré, entre $Pr = 0$ et $Pr = 0.057$, qu'en retirant la contrainte thermocapillaire comme condition aux limites de la perturbation, le seuil du mode 2, le premier dans la liste énoncée, apparaît plus tôt qu'avec la contrainte. Ainsi la contrainte thermocapillaire a un effet stabilisant et retarde l'apparition de l'instabilité stationnaire de mode 2.

Kuhlmann et Nienhüser [55] étudient la dynamique de la surface libre de la demi-zone de rapport d'aspect 1 pour deux nombres de Prandtl : 0.02 et 4.38 hors gravité et en présence de gravité. Les méthodes numériques employées sont identiques à celles utilisées par Nienhüser et Kuhlmann [80]. Les auteurs ont pour ambition de tester l'hypothèse de Kamotani *et al.* [48] et Ostrach *et al.* [81] selon laquelle une surface libre déformée est une condition nécessaire pour l'apparition des oscillations et de comparer les résultats numériques aux observations. La forme de la surface libre est calculée par l'équation de Laplace-Young, puis l'écoulement stationnaire de base associé à cette forme de surface libre est calculé à son tour. La stabilité linéaire selon des perturbations 3D permet d'étudier les déformations de la surface libre dues aux perturbations. Les perturbations sont développées en puissances du nombre capillaire. Dans ces conditions, les auteurs ont montré qu'il n'existe pas d'influence, dans la limite de faibles nombres capillaires, de la déformation de la surface libre sur l'écoulement.

Leyboldt *et al.* [68] s'intéressent aux mécanismes de la brisure de symétrie tridimensionnelle de l'écoulement axisymétrique bidimensionnel de la demi-zone à faible et haut nombre de Prandtl pour des rapports d'aspect de l'ordre de 1. Les méthodes numériques employées sont les volumes finis sur une grille non homogène en (r, z) et une formulation pseudo-spectrale dans la direction azimutale. A faible nombre de Prandtl ($Pr = \mathcal{O}(10^{-2})$), l'analyse est poussée de la première transition stationnaire

jusqu'à la seconde transition instationnaire. Pour $Pr = 4$ et $Pr = 7$, des ondes stationnaires de mode 2 brisent l'axisymétrie de l'écoulement de base. Ces ondes stationnaires sont instables et laissent place, après un temps suffisamment long, à une onde tournante de mode 2. La relation expérimentale établie par Preisser *et al.* [84], $m\Gamma = 2$, est vérifiée pour $Pr = 7$. Pour les faibles nombres de Prandtl, la seconde instabilité trouvée est toujours de mode impair et oscillante.

... en zone-flottante

L'une des premières simulations numériques de la zone-flottante latéralement chauffée a été menée par Kobayashi [53] en différences finies et hors gravité. Les fronts solides et la surface libre sont plans, les barreaux peuvent être animés d'un mouvement de rotation. Les écoulements sont ainsi décrits pour des nombres de Prandtl allant de 0.01 à 1.

Les modèles de zone-flottante diffèrent de ceux de demi-zone par les conditions aux limites. Un flux de chaleur gère la condition sur la température sur la surface libre. Les fronts solides sont, en général, isothermes, immobiles ou en translation uniforme, avec ou sans gestion de la fusion/solidification.

Chénier *et al.* [17] ont mis en évidence, pour une zone-flottante axisymétrique bidimensionnelle hors gravité avec des frontières planes, de rapport d'aspect $\Gamma_{FZ} = H/R = 2$ (hauteur/rayon) et $Pr = 0.01$, que l'écoulement pouvait subir une brisure de symétrie par rapport au plan médian. Les deux cellules ne sont plus images l'une de l'autre par symétrie par rapport au plan médian, mais l'une grossit et l'autre diminue. Les méthodes spectrales utilisées nécessitent l'utilisation d'un filtrage explicite de la singularité de vorticité sur la ligne triple. Le filtrage dans ce cas est de type polynômial et est présenté au chapitre 2. Si la longueur de filtrage près des fronts solides, *i.e.* la longueur sur laquelle le gradient radial de la vitesse axiale est sensiblement atténué, est trop élevée, alors cette brisure de symétrie n'apparaît pas. La bifurcation qui brise la symétrie est une bifurcation fourche sous-critique. Chénier *et al.* [18] décrivent, pour ce même nombre de Prandtl, les bifurcations successives subies par l'écoulement en fonction du nombre de Marangoni. Les seuils sont déterminés par un calcul de stabilité linéaire par méthode d'Arnoldi sur des champs stationnaires obtenus par méthode de Newton. Lorsque la longueur de filtrage diminue, les seuils convergent. L'impact de cette longueur de filtrage sur les écoulements a été étudiée par Kasperski et Labrosse [49] et Chénier *et al.* [19]. Il semble qu'un bon critère de convergence, en fonction de la longueur de filtrage, soit sur la convergence des maxima de la vorticité sur la surface libre. Les maxima de vitesse, température et fonction de courant sont localisés loin de la singularité et sont donc peu influencés par sa variation. Kasperski *et al.* [50] portent un intérêt particulier aux écoulements bidimensionnels hors gravité avec une grande longueur de filtrage. Les seuils de stabilité bidimensionnels des écoulements entre $Pr = 0.01$ et $Pr = 100$ sont déterminés   l'aide d'un code temporel résolvant les équations par méthodes spectrales. La structure des écoulements devrait, en suivant l'approche de Batoul *et al.* [4] et Batoul [5], être très similaire   celle obtenue en diminuant la longueur de filtrage. L'approche de Batoul *et al.* [4] et Batoul [5] consistait   observer les écoulements en cavité entraînée régularisée avec un polynôme de faible degré (*i.e.* une grande longueur de filtrage) et de les comparer   ceux régularisés avec une longueur de filtrage plus courte. Les écoulements comparés ont la même structure et les seuils d'instabilité, bien que différents, ont le même comportement. Dans le cas de la zone-flottante, le seuil d'instabilité pour $Pr = 1$ n'a pas pu être atteint, cette valeur semble être singulière car la structure de l'écoulement fait l'objet d'une compétition entre les mécanismes de nature hydrodynamique et hydrothermale. Les autres seuils trouvés sont, quant   eux, oscillants, aussi bien   faible nombre de Prandtl ($Pr < 1$) qu'  haut nombre de Prandtl ($Pr > 1$). Kasperski *et al.* [50] sont les seuls,   notre connaissance,   s'intéresser   la vorticité de l'écoulement pour décrire la structure de l'écoulement et son influence sur la vitesse et la température. Toujours avec l'idée que la longueur de filtrage est un paramètre déterminant du modèle de zone-flottante, Chénier *et al.* [19] déterminent la sensibilité de l'écoulement en zone-flottante en fonction de celle-ci. Le nombre de Prandtl est fixé   0.01. Un filtrage de type exponentiel dépendant de la température a été testé. Un écoulement asymétrique stationnaire est alors localisé par DNS   $Ma = 500$ alors qu'avec le filtrage de type polynômial cet écoulement se trouve dès $Ma = 104$.

L'ajout d'un champ magnétique est intéressant [26] pour contrôler les écoulements et éviter leurs oscillations. Kaiser et Benz [47] appliquent   une zone-flottante de silicium dopé au phosphore, dont la surface libre est déformée par la gravité et les fronts solides sont plans, un champ magnétique axial (inférieur   5T). La concentration en dopant est prise en compte dans la simulation, mais sans effet

solutocapillaire. La ségrégation axiale est bien représentée alors que la ségrégation radiale l'est moins par rapport aux expériences [27, 25], ce qui, d'après les auteurs, est dû à l'absence de courbure des fronts solides.

La première étude tridimensionnelle de la zone-flottante dont la configuration s'approche le plus de celle de Chénier [16] et Kasperski [51] a été faite par Lappa [62]. L'auteur s'intéresse à l'influence du rapport d'aspect sur la première bifurcation et à la structure des écoulements 3D, ceci pour un nombre de Prandtl égal à 0.01 et hors gravité. Le modèle utilisé a comme particularité de tenir compte du flux de chaleur émis par un fil circulaire chaud dans le plan médian. Les équations sont résolues spatialement par un schéma aux différences centrées. Le nombre de Marangoni est défini à partir des températures maximales et moyennes du champ stationnaire 2D servant de condition initiale pour le calcul de champs 3D. D'après Lappa, les seuils sont plus faibles que ceux de la demi-zone car il y a un degré de liberté de plus par rapport à la demi-zone : la symétrie par rapport au plan médian peut être brisée. Les moitiés supérieure et inférieure de l'écoulement obtenues après bifurcation sont antisymétriques l'une par rapport à l'autre. En forçant la symétrie il a été montré que le taux de croissance est plus faible que lorsqu'il n'y a pas de contrainte de symétrisation, donc quand l'écoulement est antisymétrique par rapport au plan médian. Une des conclusions les plus intéressantes est que lorsque le facteur d'aspect est égal à 1.5, la demi-zone est instable vis-à-vis d'un mode 1 alors que la zone-flottante l'est vis-à-vis d'une mode 2. Ceci souligne, d'après l'auteur, l'importance de l'interaction entre les deux cellules de convection.

Lappa [63] complète cette étude en autorisant la surface libre à se déformer en présence de la gravité. Celle-ci est considérée comme statique, et sa forme est classiquement calculée par l'équation de Gauss-Laplace. L'étude porte sur l'influence du rapport de volume S sur la stabilité de la zone-flottante ($Pr = 0.01$). Rappelons que le rapport de volume est égal au rapport entre le volume de liquide dans la zone-flottante et le volume du cylindre droit entre les deux barreaux. A cause de la gravité, la surface déformée est non symétrique par rapport au plan médian. Le champ stationnaire axisymétrique n'est alors pas comparable à celui de la demi-zone. Le nombre de Marangoni critique varie entre 3.31 à 33.24 pour S variant entre 0.8 et 1.2; la valeur maximale du seuil est atteinte pour $S = 0.8$. Les modes instables sont les modes 1, 2 ou 3. Les champs stationnaires obtenus après le seuil ont des structures très différentes selon la valeur de S . La stabilité croissante de l'écoulement lorsque $S < 1$ diminue s'expliquerait alors par le fait que les cellules séparées se comportent chacune comme une demi-zone, alors que lorsque S croît elles interagissent de plus en plus. Ceci est à l'opposé de ce qu'observent Shevtsova *et al.* [95]

Certains modèles de zone-flottante ont des géométries de plus en plus complexes et incluent de plus en plus de phénomènes physiques. Lan *et al.* [58] simulent l'ensemble zone-flottante, barreaux et four à miroir mono-ellipsoïde pour un nombre de Prandtl égal à 0.01. Les calculs se font en volumes finis avec la méthode d'Euler implicite. Les phénomènes pris en compte sont la diffusion de la chaleur dans les barreaux, les vitesses de fonte du barreau supérieur et de cristallisation du barreau inférieur et la gravité. La surface libre est considérée plane et les fronts solides sont mobiles. Lan et Chian [59] complètent ce modèle avec du transfert radiatif dans un cristal transparent pour un fluide de nombre de Prandtl égal à 4. De plus, les fronts solides sont localisés dans l'ensemble zone-flottante/barreaux par l'isotherme de la température de fusion. L'angle de contact que fait le fluide avec le cristal sur la ligne triple est un paramètre du système dépendant du réseau cristallin. Cet angle de contact sert à calculer le rayon local du cristal et ainsi à déterminer sa forme. Lan et Yeh [60] ajoutent à ce modèle un champ magnétique statique et un soluté qui joue le rôle de dopant. Il devient difficile avec ces modèles de plus en plus complexes de faire des études paramétriques et d'identifier les mécanismes de déstabilisation des écoulements.

Des simulations de zone-flottante en configuration industrielle sont abordées pour du silicium exclusivement par Raming *et al.* [86], Ratnieks *et al.* [87, 88]. Les monocristaux de silicium ont jusqu'à 200mm de diamètre [90]. Une technique particulière, dite de "needle-eye" (chas d'une aiguille, *c.f.* figure 1.3) permet d'atteindre de tels diamètres. Le chauffage se fait par induction électromagnétique, ce qui n'est possible que parce que le silicium est conducteur. L'inducteur est un tore par le centre duquel le cristal nourricier, au dessus, alimente la zone-flottante qui se trouve en dessous. Les simulations sont faites avec le progiciel commercial FLUENT. L'objectif de ces simulations est de connaître la distribution de la résistivité pour accroître la qualité des semiconducteurs produits par cette technique. Les mécanismes physiques pris en compte dans ces simulations sont la gravité, la concentration

en dopant, l'orientation de croissance du cristal, la rotation des barreaux, le champ électromagnétique haute fréquence (3MHz) de l'inducteur, le changement de phase aux interfaces solide/liquide, les vitesses du barreau inférieur et supérieur (ils peuvent être de diamètres différents) et le transfert radiatif des surfaces. Les résultats de calculs de transition d'écoulements 2D vers des écoulements instationnaires sont comparés avec les expérimentations sur la distribution de résistivité électrique axiale. Les résultats restent qualitatifs du fait de la bidimensionnalité de l'écoulement. Les études portent sur la manière de contrôler l'écoulement, et donc de contrôler la distribution de la résistivité électrique dans le monocristal.

Plan du mémoire

Ce mémoire fait suite aux travaux de Batoul [5], Chénier [16] et Kasperski [51]. Batoul [5] a développé un code de simulation numérique direct pseudo-spectral couplé à une méthode de projection-diffusion pour la résolution de la pression. Ses travaux ont montré que les conditions thermiques à la surface libre ont une grande influence sur la structure des écoulements thermocapillaires, avec ou sans gravité, ce qui a motivé l'adoption du modèle de zone-flottante avec un flux thermique latéral. Chénier [16] a poursuivi l'étude des écoulements thermocapillaires en zone-flottante en situation de couplage thermogravitationnel. Pour cela il a développé plusieurs outils : un code de recherche de solutions stationnaires par méthode de Newton et un code de stabilité linéaire par méthode d'Arnoldi. Ces outils, couplés à un code de simulation numérique direct, ont permis de mettre en évidence l'existence d'états multiples, hors gravité, pour un seul jeu de paramètres. Un diagramme des bifurcations a été établi pour expliquer les différentes bifurcations rencontrées lorsque l'on fait varier le nombre de Marangoni. L'influence de la régularisation sur les écoulements pour un faible nombre de Prandtl a également été étudiée. Les bifurcations sont influencées par la régularisation quand le couplage thermogravitationnel est faible. Dans une configuration hors gravité, Kasperski [51] a observé, de manière phénoménologique, les écoulements de zone flottante avec un faible paramètre de régularisation ($n=1$) pour des nombres de Prandtl inférieurs à 0.1 et supérieurs à 2. Deux mécanismes de déstabilisations ont été identifiés : hydrodynamique aux faibles nombres de Prandtl et hydrothermal aux grands nombres de Prandtl. Il a aussi été établi qu'un critère de convergence des écoulements stationnaires, en fonction de la régularisation, ne devait pas simplement être basé sur les variables primitives mais aussi sur la vorticité qui pouvait encore grandement varier alors que la convergence était assurée sur les variables primitives. Il a également montré que la phénoménologie de l'écoulement est conservée avec l'augmentation de la régularisation. Un modèle de régularisation thermique a été proposé pour permettre l'ajustement de l'échelle de filtrage avec la température.

Le présent travail s'inscrit en droite ligne des travaux de Chénier [16] et Kasperski [51], se plaçant hors gravité et utilisant les outils de méthode de continuation (Newton) et de stabilité linéaire.

Après ce premier chapitre qui présente les travaux expérimentaux et numériques antérieurs, le chapitre suivant décrit le modèle de zone flottante, les outils mathématiques et les méthodes numériques utilisées tout au long de ce mémoire. Les écoulements stationnaires sont calculés par une méthode de Newton et leur stabilité vis- -vis de perturbations bidimensionnelles et tridimensionnelles est déterminée grâce au calcul du mode propre dominant par la méthode d'Arnoldi. La méthode de Newton et la méthode d'Arnoldi bidimensionnelle ont été développées, pour cette configuration, par Chénier *et al.* [17]. Les méthodes spectrales sont utilisées de longue date au Limsi pour leur précision infinie. Les écoulements seront développés sur une base de polynômes de Chebyshev ainsi qu'en modes de Fourier. La fin du chapitre est dédiée   la présentation de l'outil d'analyse introduit par Wanschura *et al.* [109] et Kuhlmann et Nienhüser [55] et qui consiste   décomposer le taux de croissance de l'énergie de la perturbation en une somme de termes qui devraient permettre d'identifier les mécanismes déstabilisants.

Le troisième chapitre est consacré   l'exposé des résultats de stabilité linéaire et   leur analyse. Les outils sont d'abord validés sur une configuration de demi-zone et sont ensuite appliqués   la zone flottante. Partant du résultat obtenu par Chénier [16]   $Pr = 0.01$, une étude exhaustive de la stabilité des écoulements stationnaires bidimensionnels est menée sur une large gamme de nombres de Prandtl et pour des perturbations de mode 0 (bidimensionnelles), 1 et 2 (tridimensionnelles). Ces résultats sont analysés   la lumière de la décomposition du taux de croissance de l'énergie de la perturbation. Les écoulements de demi-zone et de zone-flottante sont aussi comparés dans le cas de perturbations

tridimensionnelles.

Le quatrième chapitre expose des résultats préliminaires de simulations d'un écoulement tridimensionnel non-linéaire pour différents nombres de Prandtl. Les paramètres situent l'écoulement au-delà du seuil de stabilité vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles. Ces paramètres sont tels que les non-linéarités sont assez faibles pour que l'écoulement soit, en première approximation la superposition de l'état stationnaire bidimensionnel et de la perturbation tridimensionnelle. Cet outil numérique a été validé sur une configuration de demi-zone étudiée par Levenstam et Amberg [66].

Le cinquième chapitre expose une méthode, dite de l'adjoint, pour localiser le lieu sensible d'un écoulement vis-à-vis de perturbations infinitésimales. L'écoulement est analysé autour des lieux les plus sensibles pour permettre l'identification de structures répondant à différents critères de stabilité tels que ceux de Fjørtoft [31] ou Bayly [6].

Chapitre 2

Modèle et Méthodes numériques

Dans ce chapitre, nous allons décrire notre modèle de zone-flottante ainsi que les méthodes numériques dont nous nous servons pour résoudre les équations du modèle. S'ensuivra une description détaillée de la résolution du système linéarisé et des bilans d'énergie utilisés pour analyser les perturbations des écoulements stationnaires.

2.1 Modèle de la zone-flottante

La zone-flottante est la partie liquide latéralement chauffée d'un barreau cylindrique de section circulaire. Elle est maintenue entre les deux parties solides du barreau par la tension superficielle. Le flux thermique latéral entraîne l'apparition d'un gradient de température sur la surface libre. Ce gradient de température engendre des inhomogénéités de tension de surface, mettant le fluide en mouvement sur la surface. C'est pour cette raison que cette surface est dite "surface libre". Lorsque la zone-flottante est placée en dehors de l'influence de la gravité, seul le mouvement de la surface libre entraîne par viscosité le fluide dans la cavité.

Pour modéliser la zone-flottante, nous avons besoin de faire des hypothèses simplificatrices afin de mieux isoler les phénomènes que nous pensons être dominants dans la déstabilisation de l'écoulement en zone-flottante. Ces simplifications ont déjà été énoncées dans les thèses de Batoul [5], Chénier [16] et Kasperski [51].

Les notations utilisées dans ce chapitre sont, pour la plupart, les mêmes que celles de la thèse de Chénier [16].

2.1.1 Géométrie

Bien que le barreau utilisé soit de géométrie cylindrique, la surface de la zone-flottante ne l'est pas forcément. La forme de la surface libre de la zone-flottante dépend des phénomènes de transports (diffusion et convection), des effets de mouillage sur les fronts solides, de la hauteur de la zone-flottante, de la pression externe et des forces volumiques d'origine gravitationnelles ou rotationnelles. Bien que des configurations de zone-flottante prennent en compte la rotation différentielle des deux fronts solides, ce ne sera pas le cas dans cette étude. La forme des fronts de fusion/solidification dépend de la vitesse d'échange de chaleur latente de changement d'état entre la phase fluide et la phase solide.

Nous supposerons que la déformation de la surface libre est suffisamment faible pour ne pas affecter l'écoulement dans la zone-flottante. La surface libre sera donc considérée comme plane et indéformable. La déformation des fronts de fusion/solidification sera aussi négligée.

La zone-flottante adopte donc une géométrie cylindrique de section circulaire de hauteur H et de rayon R (*c.f.* figure 2.1).

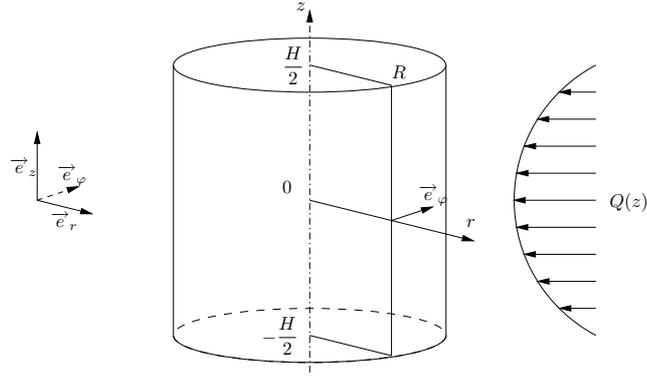


FIG. 2.1 – Configuration géométrique de la zone-flottante

2.1.2 Paramètres physiques

La zone-flottante sera, par hypothèse, composée d'un fluide newtonien incompressible. Ses paramètres physiques sont alors :

- la densité ρ en $[kg\ m^{-3}]$
- la capacité calorifique massique c_p en $[J\ kg^{-1}\ K^{-1}]$
- la viscosité dynamique μ en $[kg\ s^{-1}\ m^{-1}]$
- la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ en $[m^2\ s^{-1}]$
- la conductivité thermique λ en $[J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}]$
- la diffusivité thermique $\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ en $[m^2\ s^{-1}]$
- la contrainte capillaire à la surface libre σ en $[N\ m^{-1}]$
- le flux thermique latéral $Q(z)$ en $[W\ m^{-2}]$
- la température de fusion T_0 en $[K]$

A priori ces paramètres dépendent tous, excepté le flux thermique latéral, de la température du fluide au point où ils sont mesurés. Nous devrions donc tenir compte de cette dépendance. Néanmoins, les expérimentateurs eux mêmes éprouvent des difficultés à connaître ces dépendances finement sur un faible intervalle de température proche de la température de fusion.

En conséquence, nous adopterons les approximations de Boussinesq [7]. Seuls les paramètres dont la dépendance en température ou en pression sont à l'origine du mouvement seront développés au premier ordre en température ou en pression.

Les forces à l'origine du mouvement sont la force thermocapillaire [74] et la force d'Archimède. Les paramètres à développer sont donc σ et ρ .

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_0 - \gamma(T - T_0) \\ \rho &= \rho_0(1 - \beta(T - T_0))\end{aligned}\tag{2.1}$$

Où γ est le coefficient thermique de tension superficielle en $[N\ m^{-1}\ K^{-1}]$ et β le coefficient d'expansion volumique en $[K^{-1}]$.

2.1.3 Les équations du modèle

2.1.3.1 Equations dimensionnelles

Nous nous plaçons dans le formalisme vitesse-pression pour décrire les écoulements de la zone-flottante. En coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) , la vitesse sera notée $\vec{U} = (U, V, W)$, la pression p et la température T . Plus généralement, le vecteur représentant le système dans l'espace des phases sera noté $\mathbb{U} = (U, V, W, T)$.

Pour un fluide newtonien incompressible en géométrie cylindrique, les équations de Navier-Stokes [79, 100] et de la chaleur sous approximations de Boussinesq [7] s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{U} + g\beta(T - T_0) \vec{e}_z & (2.2a) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) T = \kappa \Delta T & (2.2b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 & (2.2c) \end{cases}$$

dont les conditions aux limites sont :

$$z = \pm \frac{H}{2} \begin{cases} \vec{U} = \vec{0} & (2.3a) \\ T = T_0 & (2.3b) \end{cases} \quad r = R \begin{cases} U = 0 & (2.4a) \\ \mu \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\gamma \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \varphi} & (2.4b) \\ \mu \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial z} & (2.4c) \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = Q(z) & (2.4d) \end{cases}$$

Les opérateurs sont décrits en annexe A.

Nota : Conditions aux limites. Nous considérons qu'il y a non glissement sur les fronts solides, donc la vitesse y est nulle. De plus, il y a un processus de fusion/solidification sur les fronts solides, donc la température y est isotherme. Sur la surface libre indéformable, la vitesse radiale est nulle. La contrainte thermocapillaire fait que les gradients axial et azimutal provoquent un gradient radial respectivement de vitesse axiale et azimutale. Le flux de chaleur à la surface libre est représenté par une condition de diffusion classique.

2.1.3.2 Une singularité au point triple

En observant les conditions aux limites, nous remarquons que, au point triple (jonction front solide-surface libre), les conditions aux limites sur la surface libre et sur les fronts solides doivent être continues, en particulier la dérivée radiale de la vitesse axiale : $\partial_r W$.

Sur les fronts solides, nous avons $W = 0$, donc $\partial_r W = 0$. Sur la surface libre, nous avons $\partial_r W = -\gamma \partial_z T$, qui implique qu'au point triple $\partial_z T = 0$. Or cette dernière condition n'est pas imposée! Nous avons alors une singularité au point triple. Les méthodes numériques que nous utilisons supportent mal la présence d'une singularité, au contraire des méthodes de précision finie qui les filtrent implicitement. Nous avons alors choisi de filtrer cette singularité en imposant au terme $\partial_r W$ défini sur la surface libre de s'annuler sur les fronts solides en le modulant par une fonction de régularisation $f_n(z)$ qui dépend d'un paramètre entier n .

La fonction de régularisation est définie par $f_n(z) = (1 - z^{2n})^2$. Elle a déjà été utilisée dans les thèses de Batoul [5], Chénier [16] et Kasperski [51] qui ont étudié son influence sur les écoulements. Il a été montré que lorsque le paramètre de régularisation (*i.e.* n) augmente, les seuils d'instationnarité décroissent et les composantes (vitesse et température) des écoulements convergent. En d'autres termes : il faut augmenter la régularisation pour avoir des écoulements convergés. Ceci se fait au détriment du temps de calcul. En effet, la fonction de régularisation est un polynôme de degré $4n$, or nous utilisons comme base spectrale des polynômes dont le degré est équivalent au nombre de points dans une direction. Le nombre de points dans la direction axiale devrait être au moins égal à $4n + 1$.

2.1.3.3 Paramètres adimensionnels

Effectuons le changement de variable $\Theta = T - T_0$ et choisissons comme longueur de référence le rayon R du cylindre. L'adimensionnement nous conduit à exprimer les grandeurs définies dans

les équations précédentes en fonction de scalaires dimensionnels (notées avec un $\hat{\cdot}$) et de fonctions adimensionnelles (notées avec un $\tilde{\cdot}$). Les notations utilisées sont identiques à celles de Chénier [16].

$$\begin{aligned}
 \vec{U} &= \hat{U} \cdot \vec{\tilde{U}} \\
 \Theta &= \hat{\Theta} \cdot \tilde{\Theta} \\
 p &= \hat{p} \cdot \tilde{p} \\
 t &= \hat{t} \cdot \tilde{t} \\
 Q(z) &= \hat{Q} \cdot \tilde{q}(\tilde{z}) \\
 r &= R \cdot \tilde{r} \\
 z &= R \cdot \tilde{z} \\
 \vec{\nabla} &= \frac{1}{R} \vec{\tilde{\nabla}}
 \end{aligned}$$

L'adimensionnement des vitesses nous donne le choix d'utiliser comme vitesse caractéristique :

$$\begin{aligned}
 \text{la vitesse de diffusion thermique} & \quad \tilde{u} = u_{th} \equiv \frac{\kappa}{R} \\
 \text{la vitesse de diffusion visqueuse} & \quad \tilde{u} = u_{visq} \equiv \frac{\nu}{R} \\
 \text{la vitesse de chute inertielle dans} & \quad \tilde{u} = u_{bouss} \equiv \sqrt{g\beta\tilde{\Theta}R} \\
 \text{un fluide thermiquement stratifié} & \\
 \text{la vitesse de convection thermocapillaire} & \quad \tilde{u} = u_{cap} \equiv \frac{\gamma\tilde{\Theta}}{\mu}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nous choisissons de fixer les échelles temporelle \tilde{t} , de pression \tilde{p} et de température $\tilde{\Theta}$ à :

$$\begin{aligned}
 \tilde{t} &= \frac{R}{\tilde{u}} \\
 \tilde{p} &= \tilde{u}^2 \rho_0 \\
 \tilde{\Theta} &= \frac{R\tilde{Q}}{\lambda}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

et le facteur de forme $A = \frac{H}{R}$. Celui-ci sera égal à 2 dans la suite. Nous fixons aussi le flux de chaleur latéral $\tilde{q}(\tilde{z}) = (1 - \tilde{z}^2)^2$.

En remplaçant dans le système (2.2-2.4) l'adimensionnement défini à l'instant, les équations du modèle deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tilde{t}} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U} = -\vec{\nabla} \tilde{p} + d_q \tilde{\Delta} \vec{U} + b \tilde{\Theta} \vec{e}_z & (2.7a) \\ \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{t}} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \right) \tilde{\Theta} = d_T \vec{\nabla}^2 \tilde{\Theta} & (2.7b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 & (2.7c) \end{cases}$$

dont les conditions aux limites sont :

$$\tilde{z} = \pm \frac{A}{2} \begin{cases} \vec{U} = \vec{0} & (2.8a) \\ \tilde{\Theta} = 0 & (2.8b) \end{cases} \quad \tilde{r} = 1 \begin{cases} \tilde{U} = 0 & (2.9a) \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{r}} = -cl \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \varphi} & (2.9b) \\ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{r}} = -cl \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{z}} f_n \left(\frac{2}{A} \tilde{z} \right) & (2.9c) \\ \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{r}} = \tilde{q}(\tilde{z}) & (2.9d) \end{cases}$$

Par commodité nous ne ferons plus apparaître les tildes ($\tilde{}$).

Notation :

Le système (2.7-2.9) sera noté dans la suite :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = L(\mathcal{U})$$

Les coefficients utilisés dans les équations sont donnés dans le tableau 2.1 en fonction de l'adimensionnement choisi pour la vitesse caractéristique.

vitesse caractéristique	d_q	b	d_T	cl
$u_{visq} \equiv \frac{\nu}{R}$	1	$\frac{Ra}{Pr}$	$\frac{1}{Pr}$	$\frac{Ma}{Pr}$
$u_{bouss} \equiv \sqrt{g\beta\tilde{\Theta}R}$	$\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{RaPr}}$	$\frac{Ma}{\sqrt{RaPr}}$
$u_{th} \equiv \frac{\kappa}{R}$	Pr	$RaPr$	1	Ma
$u_{cap} \equiv \frac{\gamma\tilde{\Theta}}{\mu}$	$\frac{Pr}{Ma}$	$\frac{RaPr}{Ma^2}$	$\frac{1}{Ma}$	1

TAB. 2.1 – Coefficients d'adimensionnement en fonction de la vitesse de référence

Pr est le nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{u_{visq}}{u_{th}}$$

Ma est le nombre de Marangoni

$$Ma = \frac{u_{cap}}{u_{th}} \quad (2.10)$$

Ra est le nombre de Rayleigh

$$Ra = \frac{u_{bouss}^2}{u_{th} u_{visq}}$$

Le domaine sur lequel les variables de l'écoulement sont définies est désigné par $\overline{\mathcal{D}}$. Sa définition, ainsi que d'autres s'y rapportant sont :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &=]0 : 1[\times \left] -\frac{A}{2} : \frac{A}{2} \right[\\
 \mathcal{D}_r &=]0 : 1[\times \left[-\frac{A}{2} : \frac{A}{2} \right] \\
 \mathcal{D}_z &=]0 : 1] \times \left] -\frac{A}{2} : \frac{A}{2} \right[\\
 \overline{\mathcal{D}} &=]0 : 1] \times \left[-\frac{A}{2} : \frac{A}{2} \right] \\
 \partial\mathcal{D} &= \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Définition :

\mathcal{E} , l'espace des 4-uplets sur $\overline{\mathcal{D}}$, est défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \forall \mathbb{U} = (U, V, W, \Theta) \in \overline{\mathcal{D}}^4, \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 (|U|^2 + |V|^2 + |W|^2 + |\Theta|^2) r dr dz < +\infty \right\} \tag{2.12}$$

Cette définition signifie que l'énergie totale du système doit être bornée. Cet espace \mathcal{E} est un espace vectoriel, mais le sous espace de \mathcal{E} pour lequel tout élément \mathbb{U} vérifie les conditions aux limites (2.8-2.9) ainsi que $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ n'est pas un espace vectoriel. \square

2.1.4 Système linéarisé

Lorsque $\mathbb{U}(t) = \mathbb{U}_0 + \mathbf{u}(t)$, avec \mathbb{U}_0 le champ stationnaire dont on veut étudier la stabilité, et $\mathbf{u}(t) = (u(t), v(t), w(t), \theta(t))$ une perturbation, le système (2.7-2.9) devient après linéarisation et explicitation des opérateurs :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{V_0}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + W_0 \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial U_0}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} + w \frac{\partial U_0}{\partial z} - \frac{2V_0 v}{r} \\
 & = -\frac{\partial p}{\partial r} + d_q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \tag{2.13a} \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{V_0}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + W_0 \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial V_0}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} + w \frac{\partial V_0}{\partial z} + \frac{U_0 v + V_0 u}{r} \\
 & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + d_q \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \tag{2.13b} \\
 & \frac{\partial w}{\partial t} + U_0 \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{V_0}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + W_0 \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial W_0}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial W_0}{\partial \varphi} + w \frac{\partial W_0}{\partial z} \\
 & = -\frac{\partial p}{\partial z} + d_q \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \tag{2.13c} \\
 & \frac{\partial \theta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{V_0}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + W_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} + u \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \\
 & = d_T \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \tag{2.13d} \\
 & \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.13e}
 \end{aligned} \right.$$

Avec pour conditions aux limites

$$z = \pm \frac{A}{2} \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} & (2.14a) \\ \theta = 0 & (2.14b) \end{cases} \quad r = 1 \begin{cases} u = 0 & (2.15a) \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} & (2.15b) \\ \frac{\partial w}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial z} f_n(z) & (2.15c) \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 & (2.15d) \end{cases}$$

En considérant l'axisymétrie de l'écoulement stationnaire \mathbb{U}_0 , les variables U_0 , V_0 , W_0 et Θ_0 dépendent uniquement de r et z . La condition limite sur la surface libre pour la vitesse azimutale V_0 devient $\partial_r V_0 = -Ma \partial_\varphi \Theta_0 = 0$ car il n'y a pas de dépendance azimutale des variables. Il n'y a pas de source de vitesse azimutale non plus sur les fronts solides, ce qui implique que $V_0 = 0$ tant que l'écoulement n'est pas instable vis-à-vis d'une perturbation possédant une composante de vitesse azimutale non nulle. Le système se simplifie :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u}{\partial r} + W_0 \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial U_0}{\partial r} + w \frac{\partial U_0}{\partial z} \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + d_q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) & (2.16a) \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v}{\partial r} + W_0 \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{U_0 v}{r} \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + d_q \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) & (2.16b) \\ & \frac{\partial w}{\partial t} + U_0 \frac{\partial w}{\partial r} + W_0 \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial W_0}{\partial r} + w \frac{\partial W_0}{\partial z} \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + d_q \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) & (2.16c) \\ & \frac{\partial \theta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} + u \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + w \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \\ & = d_T \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) & (2.16d) \\ & \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & (2.16e) \end{aligned} \right.$$

$$z = \pm \frac{A}{2} \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} & (2.17a) \\ \theta = 0 & (2.17b) \end{cases} \quad r = 1 \begin{cases} u = 0 & (2.18a) \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} & (2.18b) \\ \frac{\partial w}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial z} f_n(z) & (2.18c) \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 & (2.18d) \end{cases}$$

Les perturbations sont ensuite décomposées en séries de Fourier [109, 111] et pour lesquelles ne seront retenus que les termes de même nombre d'onde. Nous substituons :

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi, z, t) &\rightarrow u(r, z, t) \cos(k\varphi) \\
 v(r, \varphi, z, t) &\rightarrow v(r, z, t) \sin(k\varphi) \\
 w(r, \varphi, z, t) &\rightarrow w(r, z, t) \cos(k\varphi) \\
 \theta(r, \varphi, z, t) &\rightarrow \theta(r, z, t) \cos(k\varphi) \\
 p(r, \varphi, z, t) &\rightarrow p(r, z, t) \cos(k\varphi)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ce qui donne, après simplification des sinus et cosinus :

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\partial u}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u}{\partial r} + W_0 \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial U_0}{\partial r} + w \frac{\partial U_0}{\partial z} \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial r} + d_q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2k}{r^2} v \right)
 \end{aligned} \right. \tag{2.20a}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\partial v}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v}{\partial r} + W_0 \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{U_0 v}{r} \\
 &= \frac{k}{r} p + d_q \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} v + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2k}{r^2} u \right)
 \end{aligned} \right. \tag{2.20b}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\partial w}{\partial t} + U_0 \frac{\partial w}{\partial r} + W_0 \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial W_0}{\partial r} + w \frac{\partial W_0}{\partial z} \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + d_q \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned} \right. \tag{2.20c}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\partial \theta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} + u \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + w \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \\
 &= d_T \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned} \right. \tag{2.20d}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{k}{r} v + \frac{\partial w}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \right. \tag{2.20e}$$

$$z = \pm \frac{A}{2} \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \\ \theta = 0 \end{cases} \tag{2.21a}$$

$$\tag{2.21b}$$

$$r = 1 \begin{cases} u = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} = Ma \frac{k}{r} \theta \\ \frac{\partial w}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial z} f_n(z) \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \end{cases} \tag{2.22a}$$

$$\tag{2.22b}$$

$$\tag{2.22c}$$

$$\tag{2.22d}$$

Notation :

Le système (2.20-2.22) sera également écrit sous une forme plus synthétique :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{L}(\mathbf{U}_0, \mathbf{u})$$

Pour $k = 0$, la composante de vitesse azimutale de la perturbation est nulle. Le système d'équations (2.20-2.22) est alors identique à celui portant sur la stabilité linéaire 2D classique. La résolution de ce système lorsque $k = 0$ nécessite un traitement particulier car, comme il sera vu lors de la méthode de résolution du système linéaire, il n'est plus nécessaire de se servir de la divergence pour impliciter les composantes de vitesse. Il en résulte l'économie de la résolution d'une équation, donc un gain de temps.

Définition :

\mathcal{E}_{U_0} , l'espace des 4-uplets sur $\overline{\mathcal{D}}$, est défini par :

$$\mathcal{E}_{U_0} = \left\{ \forall \mathbf{u} = (u, v, w, \theta) \in \overline{\mathcal{D}}^4, \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 (|u|^2 + |v|^2 + |w|^2 + |\theta|^2) r dr dz < +\infty \right\} \quad (2.23)$$

et tel que les conditions aux limites (2.21) et (2.22) et de plus $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ soient vérifiées par chaque élément de l'espace \mathcal{E}_{U_0} . □

Muni du produit scalaire $(\bullet|\bullet)$:

$$\forall \mathbf{u}^{(1)} \in \mathcal{E}_{U_0}, \quad \forall \mathbf{u}^{(2)} \in \mathcal{E}_{U_0}, \quad (\mathbf{u}^{(1)}|\mathbf{u}^{(2)}) = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 (u^{(1)}\underline{u}^{(2)} + v^{(1)}\underline{v}^{(2)} + w^{(1)}\underline{w}^{(2)} + \theta^{(1)}\underline{\theta}^{(2)}) r dr dz \quad (2.24)$$

ceci fait que \mathcal{E}_{U_0} est bien un espace vectoriel, préhilbertien. Nous supposons que cet espace vectoriel est complet pour cette norme, donc que l'espace \mathcal{E}_{U_0} est un espace de Hilbert. Nous utiliserons ceci dans le chapitre 5 où nous espérons que la base propre de l'opérateur \mathcal{L} est une base de \mathcal{E}_{U_0}

Les mathématiciens seront certainement choqués de telles définitions. Le but n'étant pas de faire ici un cours de mathématiques, mais de tenter d'être raisonnablement rigoureux, j'espère qu'ils ne m'en tiendront aucune... rigueur.

2.2 Méthodes numériques

2.2.1 Discrétisation

2.2.1.1 Discrétisation spatiale

La méthode utilisée ici utilise des notions largement décrite par Canuto *et al.* [12], Boyd [8] et Peyret [82].

Les solutions (\vec{U}, Θ) du système (2.7-2.9) sont projetées sur une base orthogonale de polynômes de Chebyshev de degré $N_r \times N_z$. La projection se fait selon une méthode pseudospectrale. Les points de collocation sont les points de Gauss-Radau dans la direction radiale et les points de Gauss-Lobatto dans la direction axiale. Les points de Gauss-Radau, initialement répartis sur l'intervalle $] -1, 1]$, sont ramenés sur l'intervalle $]0, 1]$. L'axe n'est pas inclus, ce qui permet d'éviter d'avoir à traiter la singularité qui s'y trouve. Les points de Gauss-Lobatto, répartis sur l'intervalle $[-1, 1]$, sont ramenés sur l'intervalle $[-A/2, A/2]$ et incluent ses extrémités. La définition des ces points de collocation se trouve en annexe C.

En supposant que la solution du système (2.7-2.9) est suffisamment régulière, la projection de la solution (2.7-2.9) sur l'espace de dimension finie, N , converge exponentiellement avec le nombre de points de collocation vers la solution exacte du système (2.7-2.9).

2.2.1.2 Discrétisation temporelle

Nous décrivons l'évolution temporelle des différentes variables par un schéma aux différences finies d'ordre 2 implicite/explicite. Les dérivées temporelles sont calculées avec le schéma d'Euler retardé d'ordre 2 alors que les termes d'advection sont calculés avec un schéma d'Adams-Bashforth.

Pour une quantité x à calculer au temps $t = (n + 1)\delta t$, la connaissant aux temps $t = (n - 1)\delta t$ et $t = n\delta t$, les deux schémas précédents sont :

$$\text{Euler retardé :} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^{n+1} = \frac{3x^{n+1} - 4x^n + x^{n-1}}{2\delta t} + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

$$\text{Adams-Bashforth :} \quad x^{n+1} = 2x^n - x^{n-1} + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

Par exemple, pour résoudre une équation d'advection-diffusion d'une quantité x :

$$\frac{\partial x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) x = \vec{\nabla}^2 x$$

nous sommes amenés à résoudre un problème de Helmholtz :

$$\left(\frac{3}{2\delta t} - \vec{\nabla}^2\right) x^{n+1} = \frac{4x^n - x^{n-1}}{2\delta t} + 2\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) x^n - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) x^{n-1}$$

Où l'opérateur de Helmholtz $\left(\frac{3}{2\delta t} - \vec{\nabla}^2\right)$ est inversé en tenant compte des conditions aux limites de type mixte inhomogène Dirichlet-Neuman sur x . x^{n+1} est calculé sur $N_r - 1$ ou $N_z - 2$ points intérieurs du domaine, puis les points aux bords sont calculés de manière à respecter les conditions aux limites. L'inversion de l'opérateur consiste non pas à inverser une matrice de dimension $(N_r - 1) \times (N_r - 1)$ (ou $(N_z - 2) \times (N_z - 2)$) mais à passer dans l'espace propre de l'opérateur, d'y résoudre le problème, et à revenir dans l'espace "réel".

Evidemment cette procédure est inutile en une dimension, mais s'avère d'une efficacité optimale en deux dimensions sur une grille orthogonale. Cela permet de résoudre le problème par diagonalisations successives (Haldenwang *et al.* [40]) dans chacune des directions axiale et radiale sans avoir à inverser l'opérateur total de manière explicite. Les matrices à stocker sont au nombre de trois pour chacune des directions et ont pour dimension respective $(N_r - 1) \times (N_r - 1)$ et $(N_z - 2) \times (N_z - 2)$, ce qui est bien plus petit que l'opérateur total dont la taille est $(N_r - 1)(N_z - 2) \times (N_r - 1)(N_z - 2)$.

2.2.2 Découplage vitesse-pression

La résolution de la pression est assurée par un algorithme de projection-diffusion [4, 5]. La méthode est indépendante du schéma temporel et revient à résoudre dans le domaine \mathcal{D} de normale externe \vec{n} un système du type, avec p en inconnue :

$$\begin{aligned} \vec{u}^* - \vec{\nabla} p &= \vec{f} && \text{dans } \mathcal{D}_r \text{ pour la composante radiale} \\ &&& \text{et dans } \mathcal{D}_z \text{ pour la composante axiale} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^* &= 0 && \text{dans } \overline{\mathcal{D}} \\ \vec{u}^* \cdot \vec{n} &= -d_q \left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}^* \right) \cdot \vec{n} && \text{sur } \partial\mathcal{D} \end{aligned}$$

avec

$$\vec{u}^* = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - d_q \Delta \vec{u} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

Les opérations numériques mettant en œuvre la projection-diffusion imposent une troncature des champs, et apportent donc une erreur sur la divergence qui doit décroître exponentiellement avec le nombre de mailles dans le cas où la solution est suffisamment régulière.

2.2.3 Méthode de résolution du système linéaire par évolution temporelle

Nous devons résoudre numériquement le système (2.20-2.22) avec les outils présentés dans cette section et, entre autre, la résolution de l'opérateur de Helmholtz. Nous remarquons que dans le système (2.20), l'équation qui porte sur u fait intervenir dans le second membre la variable v , et vice-versa. Ceci implique que, dans au moins l'une de ces deux équations (la première à être résolue), un des termes dans le laplacien sera extrapolé $\left(\frac{2k}{r^2}v$ dans l'équation sur u , ou $\frac{2k}{r^2}u$ dans l'équation sur v). Expliciter ce terme dans le laplacien peut provoquer l'instabilité du schéma numérique en introduisant une condition supplémentaire plus restrictive sur le critère de stabilité. Alors que l'implicitation rend, en général, le schéma inconditionnellement stable. Etant donné que l'implicitation ne coûte pas plus que l'explicitation, autant implicitation ce terme.

Comment résoudre le système ? Nous disposons des variables au temps $n - 1$ et n , nous cherchons leurs valeurs au temps $n + 1$. Dans un premier temps, nous résolvons l'équation sur la température. En effet, seuls les termes non-linéaires sont explicités.

Ensuite vient le tour de la vitesse axiale. La température qui intervient dans l'équation sur la vitesse axiale est directement issue du calcul précédent sur la résolution de l'équation de la chaleur.

Nous disposons donc à présent de la température et de la vitesse axiale au temps $n + 1$.

Maintenant il reste à résoudre les équations sur la vitesse radiale et azimutale. Utilisons la relation sur la divergence pour exprimer v en fonction de u . Nous obtenons une expression de v^{n+1} en fonction de u^{n+1} et w^{n+1} , qui sont déjà connus. Il ne nous reste, dans le terme diffusif de l'équation sur u , que des variables exprimées au temps $n + 1$. Une fois l'équation sur u résolue, nous utilisons cette dernière valeur dans l'équation sur v .

Discrétisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\delta t} + U_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial z} + \hat{u}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial r} + \hat{w}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial z} \\ \quad = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial r} + d_q \Delta \vec{u}^{n+1} \cdot \vec{e}_r \end{array} \right. \quad (2.25a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3v^{n+1} - 4v^n + v^{n-1}}{2\delta t} + U_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial z} + \frac{U_0 \hat{v}^{n+1}}{r} \\ \quad = \frac{k}{r} p^{n+1} + d_q \Delta \vec{u}^{n+1} \cdot \vec{e}_\varphi \end{array} \right. \quad (2.25b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\delta t} + U_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial z} + \hat{u}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial r} + \hat{w}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial z} \\ \quad = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial z} + d_q \Delta \vec{u}^{n+1} \cdot \vec{e}_z \end{array} \right. \quad (2.25c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3\theta^{n+1} - 4\theta^n + \theta^{n-1}}{2\delta t} + U_0 \frac{\partial \hat{\theta}^{n+1}}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \hat{\theta}^{n+1}}{\partial z} + \hat{u}^{n+1} \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \hat{w}^{n+1} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \\ \quad = d_T \Delta_\theta \theta^{n+1} \end{array} \right. \quad (2.25d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^{n+1}}{r} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial r} + \frac{k}{r} v^{n+1} + \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (2.25e)$$

$$z = \pm \frac{A}{2} \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}^{n+1} = \vec{0} \quad (2.26a) \\ \theta^{n+1} = 0 \quad (2.26b) \end{array} \right. \quad r = 1 \left\{ \begin{array}{l} u^{n+1} = 0 \quad (2.27a) \\ \frac{\partial w^{n+1}}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} f_n(z) \quad (2.27b) \\ \frac{\partial v^{n+1}}{\partial r} = Ma \cdot k \theta^{n+1} \quad (2.27c) \\ \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial r} = 0 \quad (2.27d) \end{array} \right.$$

avec comme notation pour les variables extrapolées par la méthode d'Adams-Bashforth :

$$(\hat{u}^{n+1}, \hat{v}^{n+1}, \hat{w}^{n+1}, \hat{\theta}^{n+1}) = 2(u^n, v^n, w^n, \theta^n) - (u^{n-1}, v^{n-1}, w^{n-1}, \theta^{n-1})$$

Calcul de θ^{n+1} :

$$\text{Posons :} \quad \Delta_\theta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.28)$$

θ^{n+1} s'obtient alors en calculant à partir de l'expression (2.25d) :

$$\theta^{n+1} = \left(\Delta_\theta - \frac{3}{2\delta t d_T} \right)^{-1} \left(\frac{-4\theta^n + \theta^{n-1}}{2\delta t d_T} + \left(U_0 \frac{\partial \hat{\theta}^{n+1}}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \hat{\theta}^{n+1}}{\partial z} + \hat{u}^{n+1} \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \hat{w}^{n+1} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \right) / d_T \right) \quad (2.29)$$

Avec comme conditions aux limites $\theta^{n+1} = 0$ en $z = \pm \frac{A}{2}$ et $\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial r} = 0$ en $r = 1$.

Calcul de p^{n+1} :

La pression est résolue par le schéma classique de projection-diffusion.

D'après le système (2.25), le gradient de la pression est égal à :

$$\vec{\nabla} p^{n+1} = \left(\begin{array}{l} -\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\delta t} - U_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial r} - W_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial z} - \hat{u}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial r} - \hat{w}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial z} \\ -\frac{3v^{n+1} - 4v^n + v^{n-1}}{2\delta t} - U_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial r} - W_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial z} - \frac{U_0 \hat{v}^{n+1}}{r} \\ -\frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\delta t} - U_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial r} - W_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial z} - \hat{u}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial r} - \hat{w}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial z} \end{array} \right) + d_q \Delta \vec{u}^{n+1} \quad (2.30)$$

En prenant la divergence du gradient de la pression et en considérant que $\text{div} \vec{u}^{n+1} = 0$, on obtient une équation de Poisson :

$$\begin{aligned} \Delta p^{n+1} &= \text{div} \vec{\nabla} p^{n+1} \\ &= \text{div} \left(\left(\begin{array}{l} -\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\delta t} - U_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial r} - W_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial z} - \hat{u}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial r} - \hat{w}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial z} \\ -\frac{3v^{n+1} - 4v^n + v^{n-1}}{2\delta t} - U_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial r} - W_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial z} - \frac{U_0 \hat{v}^{n+1}}{r} \\ -\frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\delta t} - U_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial r} - W_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial z} - \hat{u}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial r} - \hat{w}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial z} \end{array} \right) + d_q \Delta \vec{u}^{n+1} \right) \\ &= \text{div} \left(\begin{array}{l} -\frac{4u^n + u^{n-1}}{2\delta t} - U_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial r} - W_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial z} - \hat{u}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial r} - \hat{w}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial z} \\ -\frac{4v^n + v^{n-1}}{2\delta t} - U_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial r} - W_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial z} - \frac{U_0 \hat{v}^{n+1}}{r} \\ -\frac{4w^n + w^{n-1}}{2\delta t} - U_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial r} - W_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial z} - \hat{u}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial r} - \hat{w}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial z} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pour résoudre cette équation de Poisson, nous avons besoin de conditions aux limites. Celles ci s'obtiennent en évaluant le produit scalaire du gradient de la pression par la normale \vec{n} extérieure au domaine \mathcal{D} . Pour cela nous avons besoin de la vitesse extrapolée au temps $n+1$.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} p^{n+1} \cdot \vec{n} &= d_q \Delta \vec{u}^{n+1} \cdot \vec{n} \\ &= -d_q \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}^{n+1} \right) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

On obtient ainsi des conditions de Neumann pour le problème. Nous pouvons donc résoudre la pression au temps $n+1$.

Calcul de w^{n+1} :

$$\text{Posons : } \Delta_w = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.32)$$

w^{n+1} s'obtient en calculant l'expression :

$$w^{n+1} = \left(\Delta_w - \frac{3}{2\delta t d_q} \right)^{-1} \left(\frac{\partial p^{n+1}}{\partial z} + \frac{-4w^n + w^{n-1}}{2\delta t d_q} + \left(U_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \hat{w}^{n+1}}{\partial z} + \hat{u}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial r} + \hat{w}^{n+1} \frac{\partial W_0}{\partial z} \right) / d_q \right) \quad (2.33)$$

Avec pour conditions aux limites $w^{n+1} = 0$ en $z = \pm \frac{A}{2}$ et $\frac{\partial w^{n+1}}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} f_n(z)$ en $r = 1$.

Calcul de u^{n+1} :

L'équation (2.25e) nous donne l'expression de v^{n+1} en fonction de u^{n+1} et w^{n+1} . Cette expression remplace v^{n+1} dans l'équation (2.25a).

$$\text{En posant : } \Delta_u = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2 - 1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Nous obtenons u^{n+1} :

$$u^{n+1} = \left(\Delta_u - \frac{3}{2\delta t d_q} \right)^{-1} \left(\frac{\partial p^{n+1}}{\partial r} + \frac{-4u^n + u^{n-1}}{2\delta t d_q} + \left(U_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial z} + \hat{u}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial r} + \hat{w}^{n+1} \frac{\partial U_0}{\partial z} \right) / d_q - \frac{2}{r} \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} \right) \quad (2.34)$$

Avec les conditions aux limites u^{n+1} en $z = \pm \frac{A}{2}$ et $u^{n+1} = 0$ en $r = 1$.

Calcul de v^{n+1} :

Finalement nous introduisons le résultat précédent pour résoudre l'équation sur v^{n+1} .

$$\text{En posant : } \Delta_v = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2 + 1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On calcule l'expression suivante pour avoir v^{n+1} :

$$v^{n+1} = \left(\Delta_v - \frac{3}{2\delta t d_q} \right)^{-1} \left(-\frac{k}{r} p^{n+1} + \frac{-4v^n + v^{n-1}}{2\delta t d_q} + \left(U_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial r} + W_0 \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial z} + \frac{U_0 \hat{v}^{n+1}}{r} \right) / d_q - \frac{2k}{r^2} u^{n+1} \right) \quad (2.35)$$

Avec comme conditions aux limites $v^{n+1} = 0$ en $z = \pm \frac{A}{2}$ et $\frac{\partial v^{n+1}}{\partial r} = Ma \cdot k \theta^{n+1}$ en $r = 1$

2.2.4 Calculer le mode propre dominant

Plusieurs méthodes sont disponibles pour calculer le mode propre dominant, *i.e.* celui dont la valeur propre a la plus grande partie réelle. La méthode de la puissance itérée et celle d'Arnoldi [2] en font partie. La méthode d'Arnoldi est d'ailleurs employée par la célèbre librairie Arpack. Chénier [16] a développé un code de calcul utilisant la méthode d'Arnoldi ; ce code a été le point de départ de l'étude de la stabilité 3D des écoulements 2D. Un aperçu rapide de la méthode d'Arnoldi utilisée ici est donnée en annexe G.

2.2.5 Bilan d'énergie

2.2.5.1 Formulation naturelle

Le bilan d'énergie adimensionné de la perturbation \mathfrak{u} , d'après Kuhlmann [56], peut nous aider à comprendre les mécanismes provoquant la croissance de la perturbation. Chaque terme de ce bilan nous donne accès aux taux de transfert d'énergie des processus qui leur sont associés, ce qui nous permettrait d'identifier les processus dominants. Ajoutons à cela la connaissance de la structure spatiale des taux de transfert locaux et nous pouvons espérer comprendre les mécanismes physiques de la déstabilisation.

Les bilans d'énergie sur la perturbation \mathfrak{u} s'obtiennent en multipliant les équations linéarisées de la vitesse et de la température par respectivement \vec{u} et θ puis en les intégrant sur le volume. La vitesse est décomposée en composante radiale et axiale. Cette décomposition est naturelle, ce qui explique la dénomination de "formulation naturelle" pour le développement qui suit.

Rappelons que la perturbation $\mathfrak{u}(t)$ s'écrit, d'après (2.19) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(t) &= (u(r, z, t) \cos(k\varphi); v(r, z, t) \sin(k\varphi); w(r, z, t) \cos(k\varphi); \theta(r, z, t) \cos(k\varphi)) \\ &= (u_c; v_s; w_c; \theta_c) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Notons le coefficient $c_k = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 k\varphi \, d\varphi$ qui dépend du nombre d'onde et qui est alors égal à $c_k = 2\pi\delta_{0,k} + \frac{\pi}{2}(1 - \delta_{0,k})$. Quand k est nul, la composante azimutale de la perturbation est nulle. Il n'est donc pas utile de définir un autre coefficient pour l'intégrale de $\sin^2 k\varphi$.

Energie cinétique

Pour obtenir l'équation bilan de l'énergie cinétique, multiplions l'équation linéarisée sur la vitesse par la composante vitesse de la perturbation.

$$\vec{u} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{u}^2}{\partial t} = \vec{u} \cdot \left(-(\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 - \vec{\nabla} p + d_q \Delta \vec{u} \right) - \frac{U_0 v_s^2}{r} \quad (2.37)$$

ce qui mène par une intégration sur le volume, avec $\dot{e}_c = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{u}^2}{\partial t}$, au bilan d'énergie cinétique $\dot{E}_c = \iiint_{\mathcal{V}} \dot{e}_c \, d^3v$.

L'intégrale sur le volume s'écrit :

$$\dot{E}_c = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=-H/2}^{H/2} \dot{e}_c \, r \, dr \, dz \, d\varphi \quad (2.38)$$

La notation de l'intégrale avec les bornes sera abandonnée au profit d'une notation sans les bornes de l'intégrale. Seule la variable d'intégration sera notée. Exemple :

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=-H/2}^{H/2} \dot{e}_c \, r \, dr \, dz \, d\varphi = \int \int \int \dot{e}_c \, r \, dr \, dz \, d\varphi \quad (2.39)$$

Le bilan d'énergie cinétique est alors, après élimination de termes à intégrale nulle sur le domaine et dont le calcul est vu en détail à l'annexe D.

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_c = & -c_k \int_z \int_r \left(\underbrace{\frac{U_0 v^2}{r}}_{I_u^1} + \underbrace{u^2 \frac{\partial U_0}{\partial r}}_{I_u^2} + \underbrace{uw \frac{\partial U_0}{\partial z}}_{I_u^3} + \underbrace{uw \frac{\partial W_0}{\partial r}}_{I_u^4} + \underbrace{w^2 \frac{\partial W_0}{\partial z}}_{I_u^5} \right) r dr dz \\
 & + c_k d_q \int_z \left(\underbrace{v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v^2}{r}}_{M_\varphi} \right)_{r=1} + \left(\underbrace{w \frac{\partial w}{\partial r}}_{M_z} \right)_{r=1} dz \\
 & - \underbrace{c_k d_q \left(\int_z \int_r \left(\left(\frac{k}{r} w + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} + \frac{k}{r} u \right)^2 \right) r dr dz - 2 \int_z \left(\frac{v^2}{r} \right)_{r=1} dz}_{D_u}
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ou encore de manière concise :

$$\dot{E}_c = -D_u + M_\varphi + M_z + \underbrace{I_u^1 + I_u^2 + I_u^3 + I_u^4 + I_u^5}_{I_u} \tag{2.41}$$

Avec :

- D_u la dissipation visqueuse
- M_z le travail de la force thermocapillaire à la surface libre dans la direction axiale
- M_φ le travail de la force thermocapillaire à la surface libre dans la direction azimutale
- I_u l'interaction entre la vitesse du champ de base et la perturbation

"Energie thermique"

De manière analogue, nous pouvons effectuer un bilan "d'énergie thermique" en faisant le produit de la composante température de la perturbation par l'équation linéarisée sur la température. Néanmoins il ne faut pas confondre cette "énergie thermique" avec celle rencontrée en thermodynamique. Nous continuerons cependant à l'appeler comme telle.

$$\theta_c \frac{\partial \theta_c}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta_c^2}{\partial t} = \theta_c \left(-(\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \theta_c - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0 + d_T \Delta \theta_c \right) \tag{2.42}$$

après une intégration sur le volume, avec $\dot{e}_\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta_c^2}{\partial t}$, ceci mène au bilan d'énergie thermique

$$\dot{E}_\theta = \iiint_{\mathcal{V}} \dot{e}_\theta d^3v.$$

Cette expression est développée et simplifiée en éliminant les termes dont l'intégrale sur le domaine est nulle. Le détail des calculs se trouve en annexe D.

$$\dot{E}_\theta = -c_k \int_r \int_z \left(\underbrace{\theta u \frac{\partial \Theta_0}{\partial r}}_{I_\theta^1} + \underbrace{\theta w \frac{\partial \Theta_0}{\partial z}}_{I_\theta^2} \right) r dz dr - \underbrace{c_k d_T \int_r \int_z \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{k}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right) r dz dr}_{D_\theta} \tag{2.43}$$

Ou bien encore :

$$\dot{E}_\theta = -D_\theta + \underbrace{I_\theta^1 + I_\theta^2}_{I_\theta} \tag{2.44}$$

Avec :

- D_θ la dissipation thermique
- I_θ l'interaction entre la température du champ de base et la perturbation

2.2.5.2 Bilans pour une bifurcation stationnaire

La perturbation \mathbf{u} associée à une bifurcation stationnaire est caractérisée par sa forme \mathbf{u}_i à l'instant initial et son taux de croissance λ . Son évolution est alors $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_i e^{\lambda t}$.

$$\mathbf{u}(t) = (u_i(r, z) \cos(k\varphi); v_i(r, z) \sin(k\varphi); w_i(r, z) \cos(k\varphi); \theta_i(r, z) \cos(k\varphi)) e^{\lambda t} \quad (2.45)$$

Le bilan d'énergie cinétique de cette perturbation est, pour la partie droite de l'égalité (2.40) :

$$\dot{E}_c = c_k \lambda \int_z \int_r (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) e^{2\lambda t} r dr dz \quad (2.46)$$

pour la partie gauche de l'égalité (2.40), il nous suffit de mettre "i" (*i.e.* initial) en indice des variables de perturbation et $e^{2\lambda t}$ en facteur de chaque terme qui s'écrit alors :

$$\begin{aligned} D_u &= c_k d_q e^{2\lambda t} \int_z \int_r \left(\frac{k}{r} w_i + \frac{\partial v_i}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} - \frac{\partial w_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v_i}{\partial r} + \frac{k}{r} u_i \right)^2 r dr dz \\ &- c_k d_q e^{2\lambda t} \int_z 2 \left(\frac{v_i^2}{r} \right)_{r=1} dz \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{array}{l|l} M_\varphi = c_k d_q e^{2\lambda t} \int_z \left(v_i \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i^2}{r} \right)_{r=1} dz & M_z = c_k d_q e^{2\lambda t} \int_z \left(w_i \frac{\partial w_i}{\partial r} \right)_{r=1} dz \\ I_u^1 = -c_k e^{2\lambda t} \int_z \int_r \frac{U_0 v_i^2}{r} r dr dz & I_u^2 = -c_k e^{2\lambda t} \int_z \int_r u_i^2 \frac{\partial U_0}{\partial r} r dr dz \\ I_u^3 = -c_k e^{2\lambda t} \int_z \int_r u_i w_i \frac{\partial U_0}{\partial z} r dr dz & I_u^4 = -c_k e^{2\lambda t} \int_z \int_r u_i w_i \frac{\partial W_0}{\partial r} r dr dz \\ I_u^5 = -c_k e^{2\lambda t} \int_z \int_r w_i^2 \frac{\partial W_0}{\partial z} r dr dz & \end{array}$$

Or, pour comparer les différents termes entre eux, nous évaluerons leur importance relative en les normalisant par le terme de diffusion, faisant ainsi disparaître l'exponentielle. Nous ne tiendrons donc pas compte du temps dans le calcul des différents termes.

Dans ce cas, les termes se trouvant dans l'expression de l'énergie thermique sont pour la première partie de l'égalité (2.43) :

$$\dot{E}_\theta = c_k \lambda \int_z \int_r \theta_i^2 e^{2\lambda t} r dr dz \quad (2.48)$$

pour la seconde partie de l'égalité (2.43), après simplifications :

$$\begin{aligned} D_\theta &= d_T c_k e^{2\lambda t} \int_r \int_z \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{k}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right) r dr dz \\ I_\theta^1 &= -c_k e^{2\lambda t} \int_z \int_r \theta u \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} r dr dz \\ I_\theta^2 &= -c_k e^{2\lambda t} \int_z \int_r \theta w \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} r dr dz \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.2.5.3 Bilans moyens pour une perturbation instationnaire

La perturbation \mathfrak{u} associée à une bifurcation instationnaire de pulsation ω est de la forme $\mathfrak{u}(t) = \mathfrak{u}_i e^{(\lambda+i\omega)t} + \underline{\mathfrak{u}}_i e^{(\lambda-i\omega)t}$. Le champ \mathfrak{u}_i est complexe de partie réelle \mathfrak{u}_i^r et de partie imaginaire \mathfrak{u}_i^i .

Donc, par exemple pour l'énergie thermique, nous avons avec $\theta = 2 (\theta_i^r \cos(\omega t) - \theta_i^i \sin(\omega t)) e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \theta^2}{\partial t} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[4 (\theta_i^r \cos(\omega t) - \theta_i^i \sin(\omega t))^2 e^{2\lambda t} \right] \\
 &= 2 \left((\lambda \theta_i^{r2} - \omega \theta_i^r \theta_i^i) \cos^2(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + (\lambda \theta_i^{i2} + \omega \theta_i^r \theta_i^i) \sin^2(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + (-\omega \theta_i^{r2} + \omega \theta_i^{i2} - 2\lambda \theta_i^r \theta_i^i) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right) e^{2\lambda t}
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Comme nous pouvons le constater, la puissance thermique est variable avec le temps. Mais contrairement à sa formulation pour une bifurcation stationnaire, les termes variables ne se simplifient pas lors d'une étude relative des différents termes qui constituent la partie droite de l'égalité qui n'est pas encore écrite.

Nous allons évaluer la variation moyenne $\langle \dot{\theta} \rangle$ de la puissance thermique. Cette moyenne est classiquement calculée sur une période, mais dans notre cas la fonction à moyenner n'est pas périodique car modulée par une exponentielle dépendant du temps. Une autre manière de faire la moyenne est de se placer à un temps t et de considérer tous les signaux oscillants possibles passant à ce temps t . Cette moyenne se fait sur la phase de la partie oscillante du signal :

$$\langle \dot{\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \dot{\theta}(\omega t + \varphi, \lambda t) dt d\varphi \tag{2.51}$$

Cette moyenne pour les terme en $\cos(\omega t) \sin(\omega t)$ est nulle :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) e^{2\lambda t} d\varphi \\
 &= \frac{-1}{2} [\cos(2\omega t + 2\varphi)]_{\varphi=0}^{2\pi} e^{2\lambda t} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Alors que cette moyenne pour les terme en $\cos^2(\omega t)$ et $\sin^2(\omega t)$ n'est pas nulle :

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2(\omega t + \varphi) e^{2\lambda t} d\varphi = \frac{\pi}{2} e^{2\lambda t} \tag{2.53}$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2(\omega t + \varphi) e^{2\lambda t} d\varphi = \frac{\pi}{2} e^{2\lambda t} \tag{2.54}$$

Ce qui finalement donne, pour la variation moyenne de la puissance thermique, une expression qui n'est pas différente du cas stationnaire :

$$\langle \dot{\theta} \rangle = \lambda e^{2\lambda t} (\theta_i^{r2} + \theta_i^{i2}) \tag{2.55}$$

Le raisonnement vaut également pour les termes D_θ , I_t^1 et I_t^2 qui servent à l'évaluation de la puissance thermique ; et il en va de même pour la puissance cinétique.

”Bilan sur les bilans de puissance cinétique et thermique”

Résumons ce qu'il faut retenir sur les bilans des puissances cinétique et thermique pour une perturbation propre stationnaire ou instationnaire. Dans la mesure où ceux-ci sont définis par un même

facteur $c_k e^{2\lambda t}$, et que nous voulons comparer leur importance relative, nous ne les ferons plus apparaître.

Perturbation stationnaire

La forme de la perturbation est : $ue^{\lambda t}$

Le bilan sur l'énergie cinétique s'exprime soit avec les termes qui correspondent à des mécanismes de transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation, soit de manière globale avec les composantes de vitesse de la perturbation et la partie réelle de sa valeur propre.

$$\begin{aligned}\dot{E}_c &= -D_u + M_\varphi + M_z + \underbrace{I_u^1 + I_u^2 + I_u^3 + I_u^4 + I_u^5}_{I_u} \\ &= \lambda \int_z \int_r (u^2 + v^2 + w^2) r dr dz\end{aligned}$$

Les termes correspondants aux mécanismes de transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation s'expriment aussi avec les composantes de vitesse de la perturbation de la manière suivante :

$$\begin{aligned}D_u &= d_q \int_z \int_r \left(\left(\frac{k}{r} w + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} + \frac{k}{r} u \right)^2 \right) r dr dz \\ &\quad - d_q \int_z 2 \left(\frac{v^2}{r} \right)_{r=1} dz\end{aligned}$$

$$M_\varphi = d_q \int_z \left(v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v^2}{r} \right)_{r=1} dz$$

$$I_u^1 = - \int_z \int_r \frac{U_0 v^2}{r} r dr dz$$

$$I_u^3 = - \int_z \int_r u w \frac{\partial U_0}{\partial z} r dr dz$$

$$I_u^5 = - \int_z \int_r w^2 \frac{\partial W_0}{\partial z} r dr dz$$

$$M_z = d_q \int_z \left(w \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=1} dz$$

$$I_u^2 = - \int_z \int_r u^2 \frac{\partial U_0}{\partial r} r dr dz$$

$$I_u^4 = - \int_z \int_r u w \frac{\partial W_0}{\partial r} r dr dz$$

De la même manière, le bilan sur l'énergie thermique s'exprime soit avec les termes qui correspondent à des mécanismes de transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation, soit de manière globale avec la composante thermique de la perturbation et la partie réelle de sa valeur propre.

$$\dot{E}_\theta = -D_\theta + \underbrace{I_\theta^1 + I_\theta^2}_{I_\theta} = \lambda \int_z \int_r \theta^2 r dr dz$$

Les termes qui correspondent aux mécanismes de transfert d'énergie thermique de l'écoulement de base vers la perturbation s'expriment de la manière suivante :

$$D_\theta = d_T \int_r \int_z \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{k}{r} \theta \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right) r dr dz$$

$$I_{\theta}^1 = - \int_z \int_r \theta u \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} r dr dz \quad \Bigg| \quad I_{\theta}^2 = - \int_z \int_r \theta w \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} r dr dz$$

Perturbation instationnaire

La forme de la perturbation est : $(u^r \cos(\omega t) - u^i \sin(\omega t)) e^{\lambda t}$. Les bilans diffèrent peu de ceux pour une bifurcation stationnaire. En fait ce serait la somme de deux bilans : le bilan sur la partie réelle de la perturbation additionné au bilan sur la partie imaginaire de la perturbation. Pour le bilan sur l'énergie cinétique, cela donne :

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_c \rangle &= - \langle D_u \rangle + \langle M_{\varphi} \rangle + \langle M_z \rangle + \underbrace{\langle I_u^1 \rangle + \langle I_u^2 \rangle + \langle I_u^3 \rangle + \langle I_u^4 \rangle + \langle I_u^5 \rangle}_{\langle I_u \rangle} \\ &= \lambda \int_z \int_r (u^{r2} + v^{r2} + w^{r2} + u^{i2} + v^{i2} + w^{i2}) r dr dz \end{aligned}$$

Les termes correspondants aux différents mécanismes de transfert d'énergie composant le bilan d'énergie cinétique sont :

$$\begin{aligned} \langle D_u \rangle &= d_q \int_z \int_r \left(\left(\frac{k}{r} w^r + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^r}{\partial z} - \frac{\partial w^r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v^r}{\partial r} + \frac{k}{r} u^r \right)^2 \right) r dr dz \\ &+ d_q \int_z \int_i \left(\left(\frac{k}{r} w^i + \frac{\partial v^i}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^i}{\partial z} - \frac{\partial w^i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{i} \frac{\partial r v^i}{\partial r} + \frac{k}{r} u^i \right)^2 \right) r dr dz \\ &- d_q \int_z 2 \left(\frac{v^{r2}}{r} + \frac{v^{i2}}{r} \right)_{r=1} dz \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} \langle M_{\varphi} \rangle = d_q \int_z \left(v^r \frac{\partial v^r}{\partial r} - \frac{v^{r2}}{r} + v^i \frac{\partial v^i}{\partial r} - \frac{v^{i2}}{r} \right)_{r=1} dz & \langle M_z \rangle = d_q \int_z \left(w^r \frac{\partial w^r}{\partial r} + w^i \frac{\partial w^i}{\partial r} \right)_{r=1} dz \\ \langle I_u^1 \rangle = - \int_z \int_r (u^{r2} + u^{i2}) \frac{\partial U_0}{\partial r} r dr dz & \langle I_u^2 \rangle = - \int_z \int_r (u^r w^r + u^i w^i) \frac{\partial U_0}{\partial z} r dr dz \\ \langle I_u^3 \rangle = - \int_z \int_r (u^r w^r + u^i w^i) \frac{\partial W_0}{\partial r} r dr dz & \langle I_u^4 \rangle = - \int_z \int_r (w^{r2} + w^{i2}) \frac{\partial W_0}{\partial z} r dr dz \\ \langle I_u^5 \rangle = - \int_z \int_r (v^{r2} + v^{i2}) \frac{U_0}{r} r dr dz & \end{array}$$

Le bilan d'énergie thermique ne s'obtient pas différemment de ce qui a été fait jusqu'à présent :

$$\langle \dot{E}_{\theta} \rangle = - \langle D_{\theta} \rangle + \underbrace{\langle I_{\theta}^1 \rangle + \langle I_{\theta}^2 \rangle}_{\langle I_{\theta} \rangle} = \lambda \int_z \int_r (\theta^{r2} + \theta^{i2}) r dr dz$$

Et de même pour les termes correspondants aux différents mécanismes de transfert d'énergie composant le bilan d'énergie thermique :

$$\langle D_\theta \rangle = d_T \int_r \int_z \left(\left(\frac{\partial \theta^r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{k}{r} \theta^r \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta^r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta^i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{k}{r} \theta^i \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta^i}{\partial z} \right)^2 \right) r dr dz$$

$$\langle I_\theta^1 \rangle = - \int_z \int_r (\theta^r u^r + \theta^i u^i) \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} r dr dz \quad \Bigg| \quad \langle I_\theta^2 \rangle = - \int_z \int_r (\theta^r w^r + \theta^i w^i) \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} r dr dz$$

2.2.5.4 Evaluation de l'erreur

Le bilan d'énergie se fait après avoir calculé le mode propre de perturbation étudié, ici le mode propre dominant. Pour connaître la précision des calculs, nous devons être en mesure de donner l'erreur commise sur les bilans présentés. L'erreur est calculée à partir de deux formulations différentes des taux de croissance de l'énergie cinétique et thermique. L'une des formulations est celle que nous venons de développer, l'autre est obtenue à partir de la perturbation et de son taux de croissance λ , qui est la partie réelle de la valeur propre associée à la perturbation.

Erreur sur la puissance cinétique

L'erreur $\delta_{\dot{e}_c}$ pour une perturbation stationnaire est définie par :

$$\delta_{\dot{e}_c} = \frac{\left| \dot{E}_c + D_u - M_\varphi - M_z - I_u^1 - I_u^2 - I_u^3 - I_u^4 - I_u^5 \right|}{\max \left(\left| \dot{E}_c \right|, |D_u|, |M_\varphi|, |M_z|, |I_u^1|, |I_u^2|, |I_u^3|, |I_u^4|, |I_u^5| \right)} \quad (2.56)$$

et pour une perturbation instationnaire est définie par :

$$\delta_{\dot{e}_c} = \frac{\left| \langle \dot{E}_c \rangle + \langle D_u \rangle - \langle M_\varphi \rangle - \langle M_z \rangle - \langle I_u^1 \rangle - \langle I_u^2 \rangle - \langle I_u^3 \rangle - \langle I_u^4 \rangle - \langle I_u^5 \rangle \right|}{\max \left(\left| \langle \dot{E}_c \rangle \right|, |\langle D_u \rangle|, |\langle M_\varphi \rangle|, |\langle M_z \rangle|, |\langle I_u^1 \rangle|, |\langle I_u^2 \rangle|, |\langle I_u^3 \rangle|, |\langle I_u^4 \rangle|, |\langle I_u^5 \rangle| \right)} \quad (2.57)$$

avec \dot{E}_c et $\langle \dot{E}_c \rangle$ calculés comme suit :

$$\dot{E}_c = \lambda \int_z \int_r (u^2 + v^2 + w^2) r dr dz \quad (2.58)$$

$$\langle \dot{E}_c \rangle = \lambda \int_z \int_r (u^{r2} + v^{r2} + w^{r2} + u^{i2} + v^{i2} + w^{i2}) r dr dz \quad (2.59)$$

Erreur sur la puissance thermique

De même, l'erreur $\delta_{\dot{e}_\theta}$ pour une perturbation stationnaire est définie par :

$$\delta_{\dot{e}_\theta} = \frac{\left| \dot{E}_\theta + D_\theta - I_\theta^1 - I_\theta^2 \right|}{\max \left(\left| \dot{E}_\theta \right|, |D_\theta|, |I_\theta^1|, |I_\theta^2| \right)} \quad (2.60)$$

et pour une perturbation instationnaire est définie par :

$$\delta_{\dot{e}_\theta} = \frac{\left| \langle \dot{E}_\theta \rangle + \langle D_\theta \rangle - \langle I_\theta^1 \rangle - \langle I_\theta^2 \rangle \right|}{\max \left(\left| \langle \dot{E}_\theta \rangle \right|, \left| \langle D_\theta \rangle \right|, \left| \langle I_\theta^1 \rangle \right|, \left| \langle I_\theta^2 \rangle \right| \right)} \quad (2.61)$$

avec \dot{E}_θ et $\langle \dot{E}_\theta \rangle$ calculés comme suit :

$$\dot{E}_\theta = \lambda \int_z \int_r \theta^2 r dr dz \quad (2.62)$$

$$\langle \dot{E}_\theta \rangle = \lambda \int_z \int_r (\theta^{r^2} + \theta^{i^2}) r dr dz \quad (2.63)$$

2.2.5.5 Formulation centrifuge

La vitesse de la perturbation peut se décomposer dans une base locale où les vecteurs sont exprimés en composantes parallèle et orthogonale de l'écoulement de base. Ceci donne lieu à une nouvelle décomposition des taux de croissance de l'énergie cinétique et thermique qui fait apparaître l'influence des effets centrifuges de l'écoulement de base sur la perturbation.

En décomposant, comme Nienhüser et Kuhlmann [80], la vitesse de la perturbation $\vec{u} = \vec{u}_\perp + \vec{u}_\parallel$ avec :

$$\vec{u}_\parallel = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{U}_0) \vec{U}_0}{\|\vec{U}_0\|^2} \quad \text{et} \quad \vec{u}_\perp = \vec{u} - \vec{u}_\parallel$$

on obtient comme termes intervenant dans la décomposition de l'énergie cinétique :

$$\begin{array}{l|l} I_u'^2 = - \int_z \int_r \vec{u}_\perp \cdot (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 r dr dz & I_u'^3 = - \int_z \int_r \vec{u}_\perp \cdot (\vec{u}_\parallel \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 r dr dz \\ I_u'^4 = - \int_z \int_r \vec{u}_\parallel \cdot (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 r dr dz & I_u'^5 = - \int_z \int_r \vec{u}_\parallel \cdot (\vec{u}_\parallel \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 r dr dz \\ I_\theta'^1 = - \int_z \int_r \theta (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0 r dr dz & I_\theta'^2 = - \int_z \int_r \theta (\vec{u}_\parallel \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0 r dr dz \end{array}$$

L'évaluation de ces composantes dans le cas d'une perturbation oscillante et l'évaluation de l'erreur suit une démarche similaire à celle vue pour la précédente décomposition. Le terme $I_u'^1$ est égal au terme I_u^1 car la composante de vitesse azimutale de la perturbation, qui intervient dans l'évaluation de ces termes, reste inchangée par les décompositions naturelle et centrifuge.

La décomposition centrifuge permet d'identifier une instabilité centrifuge par le terme $I_u'^4$. Mais ceci ne suffit pas. Le critère de Bayly [6] permet de préciser le critère de stabilité de Rayleigh pour des écoulement tournants bidimensionnels. Une condition suffisante d'instabilité pour un fluide bidimensionnel inviscide est que les lignes de courant sont convexes et fermées, et que la circulation le long des lignes de courant décroît vers l'extérieur dans certaines parties de l'écoulement.

Plus généralement, la décomposition du taux de croissance de l'énergie en ces termes centrifuges permet de déterminer si les mécanismes d'échange d'énergie dominants entre le champ stationnaire et la perturbation se font parallèlement ou perpendiculairement au champ stationnaire.

Chapitre 3

Stabilité linéaire des écoulements stationnaires 2D vis-à-vis de perturbations 2D et 3D

Nous étudierons dans ce chapitre la stabilité linéaire de l'écoulement axisymétrique, et symétrique par rapport au plan médian, stationnaire vis-à-vis de perturbations (modes) 2D et 3D. Nous chercherons dans un premier temps le seuil de stabilité, en fonction du nombre de Marangoni, de l'écoulement stationnaire, obtenu par une méthode de Newton [73, 16], pour le mode 0 (perturbation 2D), puis nous chercherons son seuil de stabilité pour le mode 1 et le mode 2.

Nous essaierons de déterminer, pour chacun de ces modes, l'origine de l'instabilité du champ stationnaire par une étude basée sur la puissance fournie par le champ stationnaire à la perturbation, décrite par Kuhlmann [56].

L'étude se fera sur la plage des nombres de Prandtl allant de $Pr = 0.001$ à $Pr = 100$. Dans ce chapitre, nous montrerons la validité de nos codes de calcul sur la configuration de demi-zone, qui a été la plus étudiée. Nous étudierons brièvement la convergence des champs stationnaires en fonction de la régularisation et du maillage, puis nous décrirons les perturbations 3D de nombre d'onde 0, 1 et 2 qui déstabilisent la zone-flottante. Pour chaque écoulement, des hypothèses sur l'origine des instabilités seront formulées à la lumière de l'analyse en énergie.

3.1 Validation des codes sur la demi-zone

La validation des codes de calcul est faite en comparant nos résultats à ceux obtenus par Wanschura *et al.* [109] dans une configuration de demi-zone sans régularisation. Les champs y sont approchés par une méthode de collocation en polynômes de Chebyshev selon la direction radiale et des différences finies du second ordre selon la direction axiale. Le champ stationnaire est obtenu, en formulation fonction de courant - rotationnel, par une méthode de Newton, et la stabilité linéaire par une résolution d'un problème aux valeurs propres par méthode inverse, permettant de trouver le seuil par la méthode de Brent [9]. Le seuil de stabilité de l'écoulement axisymétrique pour $Pr = 0.02$ est en mode $k = 2$ à $Ma_c = 41.22$ pour une grille de $N_r \times N_z = 25 \times 80$.

Pour valider notre code de calcul, nous l'avons modifié afin qu'il respecte la géométrie du système de demi-zone et nous avons recherché le seuil de stabilité de l'écoulement axisymétrique à $Pr = 0.02$ pour les modes 1 et 2 en faisant varier à la fois le paramètre de régularisation n et le nombre de points sur la surface libre de manière à ce que la fonction de régularisation y soit bien décrite ($N_z \geq 8n$) et, pour le mode 2, en faisant varier uniquement le maillage. Le seuil est déterminé par interpolation linéaire de la partie réelle de la valeur propre dominante de part et d'autre de celui-ci. Les figures 3.1 et 3.2 donnent respectivement les seuils des modes 1 et 2 à $Pr = 0.02$ en fonction du paramètre de régularisation n et pour un maillage pour lequel N_z est supérieur ou égal à $4n$. La valeur du seuil est atteinte pour $n = 20$ pour les deux modes. Le valeur du seuil vaut $Ma_c = 69.5$ pour le mode 1 et $Ma_c = 42.46$ pour le mode 2. Pour ce même mode 2, n peut être considéré égal à 15. Le tableau 3.1

donne le seuil du mode 2 pour $n = 15$ en fonction du maillage.

Le seuil du mode 2 converge rapidement, à régularisation fixée, pour des maillages qui décrivent grossièrement cette fonction de régularisation (tableau 3.1). Pour une régularisation et un maillage variables (*c.f.* figure 3.2), nous pouvons considérer que le seuil est arrivé à convergence pour $n = 15$. Nous avons un écart relatif de 3% sur le seuil du mode 2 à $Pr = 0.02$ avec Wanschura *et al.* [109].

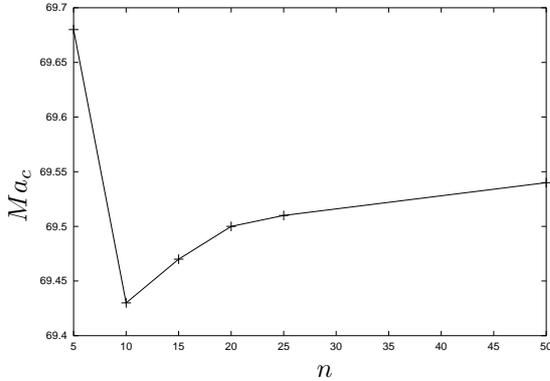


FIG. 3.1 – Seuil d’instabilité du mode 1 à $Pr = 0.02$ en fonction du paramètre de régularisation n

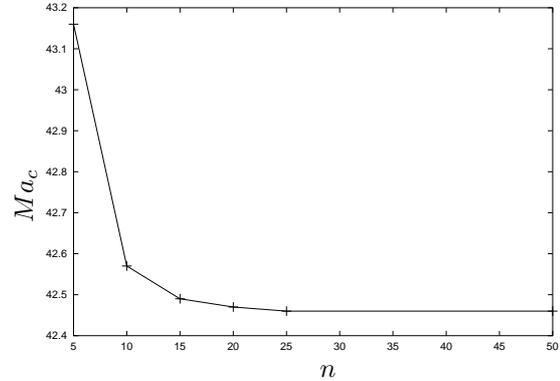


FIG. 3.2 – Seuil d’instabilité du mode 2 à $Pr = 0.02$ en fonction du paramètre de régularisation n

$N_r \times N_z$	60×90	60×80	60×70	60×60	50×60	50×50
Ma_c	42.49	42.49	42.49	42.49	42.49	42.49
$N_r \times N_z$	40×50	40×40	30×40	30×30	20×30	20×20
Ma_c	42.49	42.49	42.49	42.49	42.49	42.45

TAB. 3.1 – Premier seuil de stabilité du mode 2 à $Pr = 0.02$ pour un paramètre de régularisation $n = 15$ en fonction du nombre de mailles

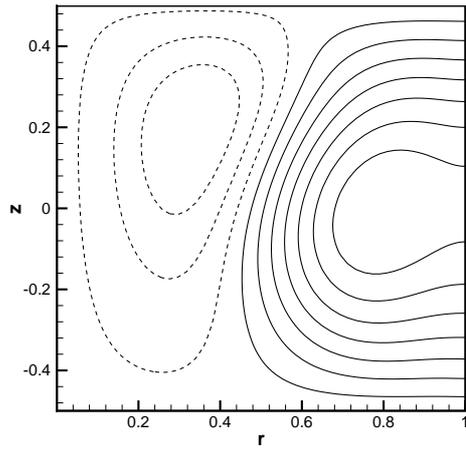
$N_r \times N_z$	15×40	17×80	20×80	25×80	30×100
Ma_c	42.14	39.70	40.68	41.24	41.20

TAB. 3.2 – Premier seuil de stabilité du mode 2 à $Pr = 0.02$ en fonction du nombre de mailles par Wanschura *et al.* [109]

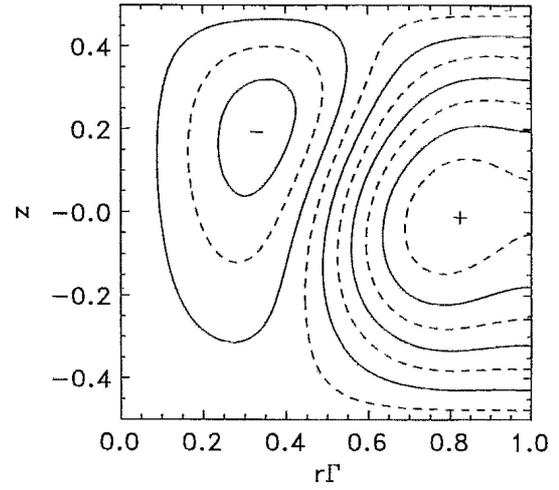
La comparaison de la structure du mode critique avec leurs représentations données par Wanschura *et al.* [109] permet d’estimer la validité de nos calculs.

Sur la figure 3.3 sont représentées la température et les vitesses radiale et axiale du mode 2 à $Pr = 0.02$ et $Ma = 42$ pour une régularisation $n = 15$ et une grille de 70×100 et les mêmes composantes du mode 2 obtenues par Wanschura *et al.* [109] pour la même valeur des paramètres, sur une grille de 25×80 . Les modes obtenus sont identiques à ceux de Wanschura *et al.* [109]. Dans notre cas, la valeur du seuil est $Ma_c = 42.29$.

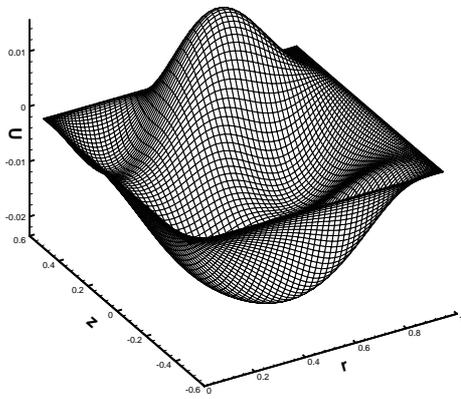
Ces résultats permettent d’affirmer, du moins à faible Pr , que les codes de calculs sont validés. Il semblerait également que la bonne description de la fonction de régularisation sur la surface libre ($N_z \geq 4n$) ne soit pas une condition nécessaire de convergence du seuil d’instabilité. Nous reviendrons plus avant sur la structure du mode critique de la demi-zone que nous comparerons à la zone-flottante, configuration que nous allons maintenant étudier.



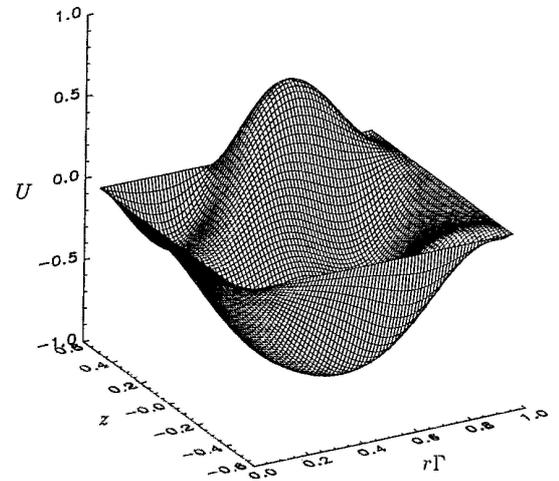
(a)



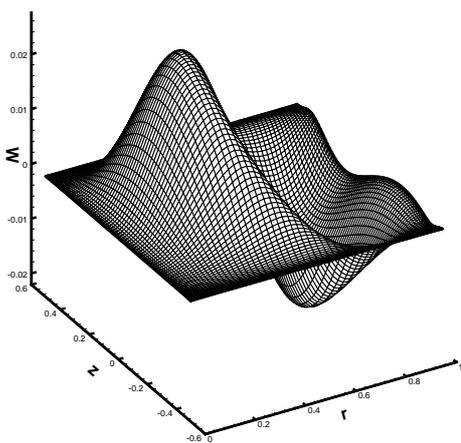
(b)



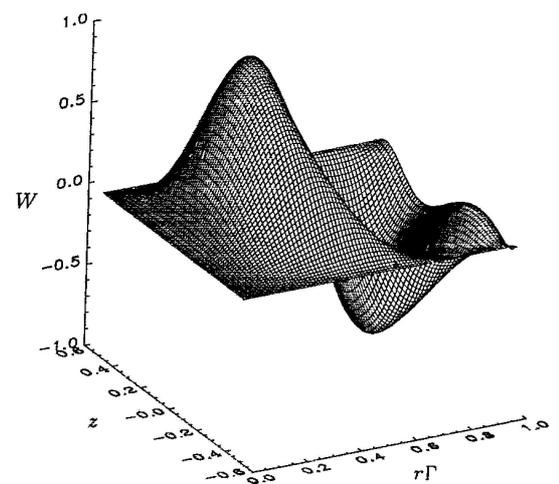
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 3.3 – Composantes thermique (a), de vitesse radiale (c) et de vitesse axiale (e) du mode critique à $Pr = 0.02$, $Ma = 42$, $\Gamma = 1$ et $k = 2$ comparées à celles obtenues par Wanschura *et al.* [109]

3.2 La zone-flottante

3.2.1 Convergence spatiale et régularisée des écoulements 2D stationnaires

Pour déterminer le seuil de stabilité des écoulements 2D stationnaires, il est nécessaire de savoir quelle est la résolution minimale acceptable pour bien représenter le champ stationnaire, même si, comme on a pu le constater avec la demi-zone, il n'est pas nécessaire que la régularisation soit correctement représentée sur la surface libre pour avoir la convergence du seuil d'instabilité. Les seuils d'instabilité sont, *a priori*, fortement dépendants de la régularisation. Chénier [16] a montré que pour les écoulements thermogravitationnels à $Pr = 0.01$ et $Ma = 600$, aucune bifurcation n'est observée sur la courbe de continuation pour $1000 > Ra > -1000$ à $n = 1$ alors qu'il en apparaît pour $n = 6$. Pour $Ra > 28000$, la nature et l'ordre d'apparition des bifurcations rencontrées sur la courbe de continuation ne sont pas modifiés par n , ni l'ordre de grandeur des valeurs seuils. Pour les écoulements thermocapillaires, c'est-à-dire pour $Ra = 0$, pour $n = 1$ une bifurcation de Hopf est trouvée pour Ma de l'ordre de 100000 avec un code temporel [51] alors que pour $n = 13$ une bifurcation fourche a été localisée à $Ma \simeq 104$ avec un code de calcul de solutions stationnaires par méthode de Newton couplé à un code de calcul de mode propre par méthode d'Arnoldi [16, 19].

Pour établir la convergence, ou non convergence, des écoulements stationnaires, pour différentes régularisations et maillages, nous nous intéressons à la convergence de grandeurs caractéristiques qui sont :

- les maxima des composantes de vitesse radiale U_0 , axiale W_0 et la température Θ_0 .
- les maxima du rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$, de la fonction de courant Ψ_0 et de la divergence.

La convergence des maxima donne une première indication sur le comportement global du système en fonction du nombre de mailles et de la régularisation. Un meilleur critère, si on veut affiner les résultats, serait de prendre comme critère de convergence le maximum des fluctuations locales.

Nous nous sommes intéressés à la convergence de ces grandeurs pour les paramètres du système qui nous placent dans les régimes convectif ou diffusif pour la quantité de mouvement et la température. Le nombre adimensionnel donnant une indication sur le régime de la quantité de mouvement est le nombre de Reynolds Re . Celui qui caractérise le régime de la température est le nombre de Péclet thermique Pe_θ . Il semble raisonnable de prendre comme valeurs $Re = 10^{\pm 2}$ et $Pe_\theta = 10^{\pm 2}$ (*c.f.* tableau 3.3).

$Pe_\theta \backslash Re$	10^{-2}	10^2
10^{-2}	$Pr = 1$ $Ma = 10^{-2}$	$Pr = 10^{-4}$ $Ma = 10^{-2}$
10^2	$Pr = 10^4$ $Ma = 10^2$	$Pr = 1$ $Ma = 10^2$

TAB. 3.3 – Paramètres des écoulements stationnaires à étudier en maillage et régularisation

Les nombres de Reynolds et de Péclet thermique sont reliés aux nombres de Prandtl et de Marangoni par les relations :

$$Ma = RePr \quad \text{et} \quad Pe_\theta = Ma \quad (3.1)$$

Ce sont des paramètres de contrôle de l'écoulement. On définit aussi le nombre Péclet effectif (Pe_{eff}) comme étant, d'après l'adimensionnement que nous avons choisi, la vitesse maximale du fluide à la surface libre. De manière générale, la vitesse maximale du fluide, pour tous les paramètres explorés, est maximale sur la surface libre. Le nombre de Reynolds effectif (Re_{eff}) se déduit, connaissant le nombre de Prandtl, des formules 3.1. Ces nombres se déterminent après le calcul de l'écoulement obtenu avec les paramètres de contrôle.

Les résultats obtenus, présentés en annexe E, montrent que le nombre Péclet de l'écoulement est un ordre de grandeur en deçà du nombre de Péclet de contrôle. Le nombre de Reynolds effectif est également un ordre de grandeur en dessous du nombre de Reynolds déduit des paramètres de contrôle

de l'écoulement. Les paramètres effectifs, Pe_{eff} et Re_{eff} , correspondant au tableau 3.3 sont rassemblés dans le tableau 3.4. La différence d'ordre de grandeur entre les paramètres et paramètres effectifs est compatible avec ce qu'ont observé Kasperski *et al.* [50] avec une régularisation $n = 1$ pour différents nombres de Prandtl et de Marangoni. Les nombres de Reynolds et Péclet thermique se trouvant dans le tableau 3.3 ne caractérisent donc pas les écoulements obtenus à ces paramètres. Il aurait fallu, pour bien faire, calculer des écoulements convergés (*i.e.* pour un grand nombre de mailles et un paramètre de régularisation élevé), en déduire les paramètres effectifs les caractérisant (nombres de Reynolds et Péclet thermique de l'écoulement) et ne garder que ceux qui rentrent dans le cadre du tableau 3.3.

$Pe_\theta \backslash Re$	10^{-2}	10^2
10^{-2}	$Re_{eff} \simeq 10^{-3}$ $Pe_{\theta eff} \simeq 10^{-3}$	$Re_{eff} \simeq 10$ $Pe_{\theta eff} \simeq 10^{-3}$
10^2	$Re_{eff} \simeq 10^{-3}$ $Pe_{\theta eff} \simeq 10$	$Re_{eff} \simeq 10$ $Pe_{\theta eff} \simeq 10$

TAB. 3.4 – Paramètres effectifs obtenus *a fortiori* aux paramètres du tableau 3.3

Cependant, il semble plus judicieux d'étudier la convergence des champs stationnaires bi-dimensionnels à $(Pr, Ma) = (10^{-2}, 100)$ et $(Pr, Ma) = (10^2, 60000)$; ces valeurs correspondent à des paramètres proches des seuils d'instabilité comme nous le verrons plus loin. Dans cette étude, les maillages varient de $N_r \times N_z = 20 \times 30$ à $N_r \times N_z = 150 \times 220$ et le paramètre de régularisation de $n = 1$ à $n = 50$.

3.2.1.1 Convergence du champ stationnaire à $(Pr, Ma) = (10^{-2}, 100)$

Le comportement des différentes variables de l'écoulement à $(Pr, Ma) = (10^{-2}, 100)$ est représenté sur la figure 3.4. D'après l'analyse de celle-ci :

- A maillage constant, U_0 et W_0 sont sous-estimées alors que Θ_0 est sur-estimée à n faible.
- A régularisation constante, bien que la convergence avec le maillage soit rapide, U_0 et Θ_0 sont sous-estimées alors que W_0 est surestimée.

Les maxima des variables principales convergent à partir de $n = 10$ et de $N_r \times N_z = 5000$. La divergence relative décroît avec le maillage tandis qu'elle augmente avec la régularisation. Le rotationnel augmente avec la régularisation et est constant à régularisation constante à partir de $N_r \times N_z = 5000$. La fonction de courant augmente à maillage constant et converge rapidement à régularisation constante.

Les paramètres effectifs de l'écoulement à $(Pr, Ma) = (10^{-2}, 100)$ sont $Ma_{eff} = 10$ et $Re_{eff} = 10^3$. L'écoulement est faiblement diffusif en température et convectif en quantité de mouvement.

3.2.1.2 Convergence du champ stationnaire à $(Pr, Ma) = (10^2, 60000)$

Sur la figure 3.5, les variables U_0 et W_0 de l'écoulement à $(Pr, Ma) = (10^2, 60000)$ n'ont pas convergé en régularisation alors que Θ_0 a convergé dès $n = 10$. La convergence en maillage est atteinte pour des maillages de l'ordre de $N_r \times N_z = 10000$.

De la même manière que pour $Pr = 10^{-2}$, la divergence relative décroît avec le maillage tandis qu'elle augmente avec la régularisation. La surface a la même allure que pour $Pr = 10^{-2}$ à la différence qu'aux faibles maillages apparaissent des irrégularités, certainement dues à ce que le maximum ne se situe pas sur la grille. Le rotationnel augmente avec la régularisation et converge rapidement avec le maillage. Il ne semble pas encore entamer sa convergence avec la régularisation. La fonction de courant augmente et converge rapidement à maillage constant et devient vite constante à régularisation constante.

Les paramètres effectifs de l'écoulement à $(Pr, Ma) = (10^2, 60000)$ sont $Ma_{eff} = 600$ et $Re_{eff} = 6$. L'écoulement est convectif en température et faiblement diffusif en quantité de mouvement

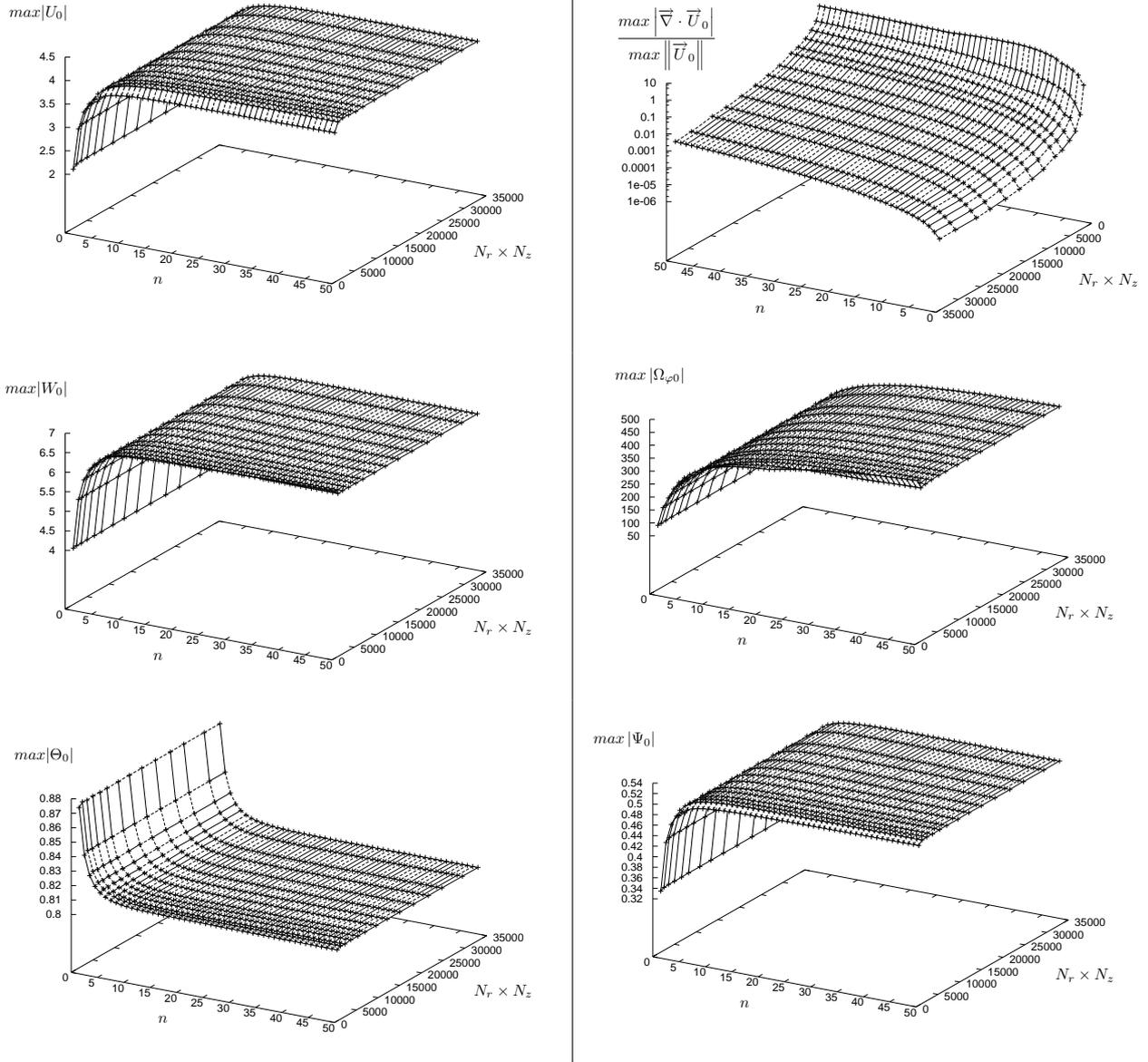


FIG. 3.4 – Comportement des maxima des variables principales du champ stationnaire à $Pr = 10^{-2}$ et $Ma = 100$ en fonction de la régularisation n et du nombre de mailles $N_r \times N_z$

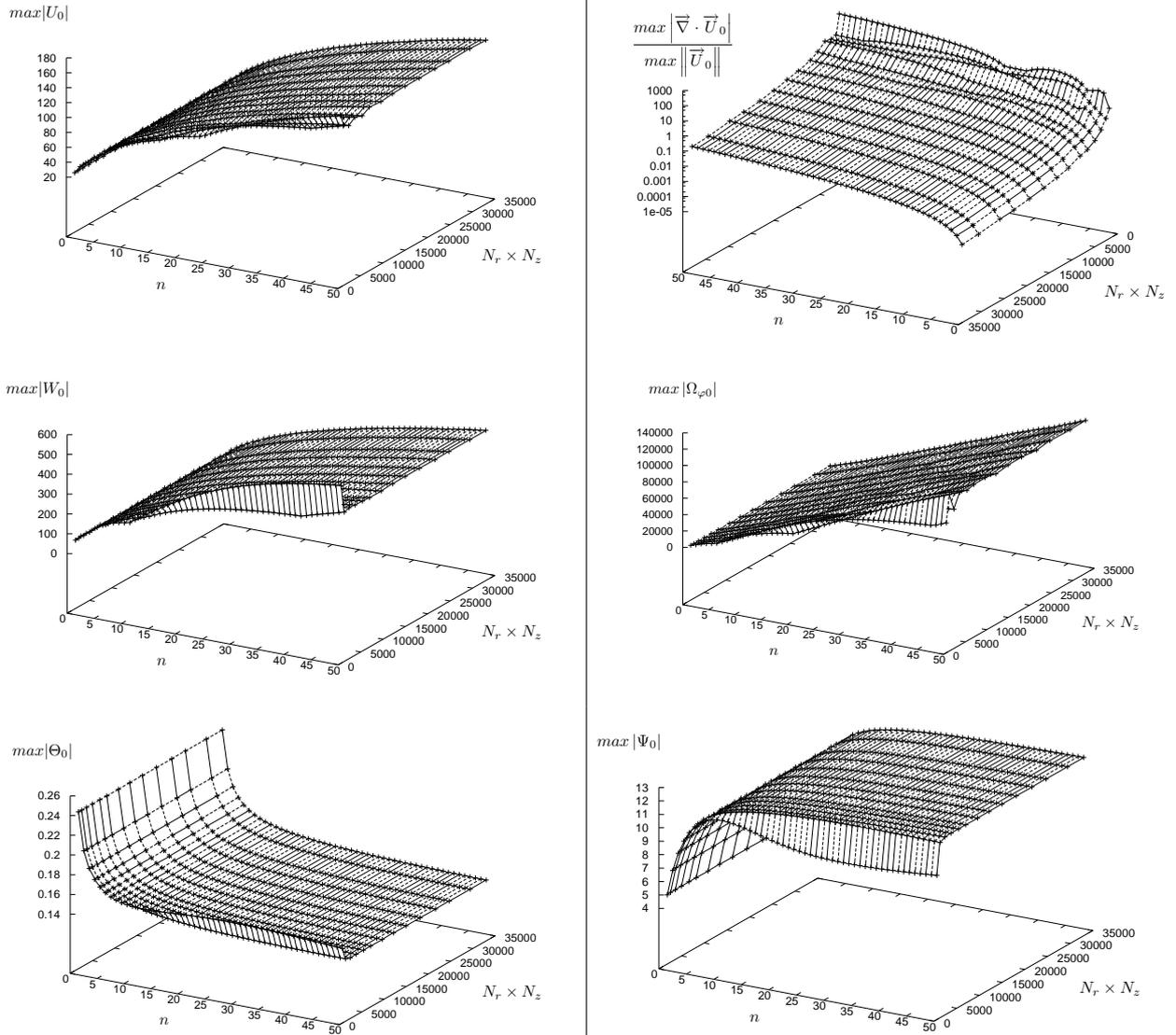


FIG. 3.5 – Comportement des maxima des variables principales du champ stationnaire à $Pr = 10^2$, $Ma = 60000$ en fonction de la régularisation n et du nombre de mailles $N_r \times N_z$

Une tendance globale, en fonction de la régularisation, des composantes de l'écoulement sur les résultats présentés sur les figures 3.4, 3.5 et celles présentées en annexe (*c.f.* figures E.1 à E.4) est que la température est sur-estimée et la vitesse sous-estimée. La température est constante dans le cas des faibles nombres de Marangoni ($Ma = 10^{-2}$, *c.f.* figures E.1 et E.3) car elle est faiblement convectée, donc fortement diffusée, sur la surface libre. Ce n'est pas le cas des grands nombres de Marangoni pour lesquels la température est sur-estimée.

La vitesse axiale étant sous-estimée, ceci implique que la température est moins convectée, donc elle "s'accumule" plus que lorsque la vitesse axiale est plus élevée. La vitesse axiale est sous-estimée aux petites valeurs du paramètre de régularisation car la fonction de régularisation tend en tout point de la surface libre vers 1 par valeurs inférieures, sauf aux fronts solides où elle est nulle. La fonction de régularisation agit directement sur la vitesse axiale sur la surface libre via la contrainte thermocapillaire. Donc, lorsque le paramètre de régularisation augmente, la contrainte thermocapillaire augmente, ce qui fait augmenter la vitesse axiale. L'augmentation de la vitesse radiale est directement liée à l'augmentation de la vitesse axiale car le transfert de quantité de mouvement se fait uniquement par la présence des fronts solides.

Il semblerait également qu'un paramètre pertinent caractérisant la convergence des écoulements soit le rotationnel, ce que Kasperski [51] avait déjà évoqué. Cependant, nous avons vu que la convergence du seuil d'instabilité à faible nombre de Prandtl en demi-zone était atteinte pour des maillages et régularisations faibles pour lesquelles le rotationnel n'a certainement pas convergé. Dans le cas des grands nombres de Prandtl, toutes les composantes de l'écoulement n'ont pas convergé en fonction du maillage et de la régularisation. Les seuils, eux aussi, ne sont pas convergés en fonction du maillage et de la régularisation (les résultats ne sont pas présentés ici, les temps de calcul devenant prohibitifs). Néanmoins, dans un souci de clarté, nous garderons le même paramètre de régularisation qu'à faible Prandtl, en espérant que le comportement de l'écoulement est globalement le même que celui qui est convergé.

Les deux cas qui viennent d'être présentés ne recouvrent pas toutes les situations envisageables pour les écoulements en zone-flottante, mais les écoulements les plus rencontrés appartiennent à l'une des deux catégories d'écoulements présentés.

Après avoir vu le comportement des écoulements stationnaires pour deux scénarios convectifs et diffusifs pour la quantité de mouvement et la température, nous nous intéressons aux seuils d'instabilité Ma_c de ces écoulements bidimensionnels vis-à-vis des modes 0, 1 et 2 pour un rapport d'aspect $A = 2$ et pour un paramètre de régularisation $n = 13$. Les seuils de ces modes sont regroupés sur la figure 3.6 et les pulsations critiques correspondantes sont sur la figure 3.7. Les données numériques sont regroupées à l'annexe F. Chacune de ces courbes sera analysée dans le détail par la suite. Le mode 2 est le plus déstabilisant pour les bas nombres de Prandtl et le mode 1 l'est pour les hauts nombres de Prandtl. La zone transitoire autour de $Pr = 1$ ne sera pas analysée. Le mode 0 n'est pas le plus déstabilisant, mais sa relative simplicité en tant que perturbation 2D d'un écoulement 2D en fait un sujet intéressant pour comprendre les mécanismes déstabilisant l'écoulement. Nous verrons d'abord les perturbations en mode 0, ensuite nous nous intéresserons aux modes qui sont déstabilisants parmi le mode 1 et 2, respectivement à haut Pr et à bas Pr .

3.2.2 Etude du mode 0

L'étude de la stabilité 2D de l'écoulement 2D en zone-flottante peut paraître simpliste face aux études 3D plus proches de la réalité. Néanmoins des phénomènes intéressants et encore inexplicables apparaissent dans ces modèles simples comparés aux modèles 3D. Par exemple Eric Chénier a mis en évidence l'existence d'états 2D stationnaires stables non symétriques par rapport au plan médian à $Pr = 0.01$. La figure 3.8 représente une courbe de continuation donnant la valeur d'un champ physique (vitesse radiale, axiale ou température) en un point donné du maillage en fonction de la valeur du nombre de Marangoni. Le nombre de Prandtl est égal à $Pr = 0.01$ et le rapport d'aspect est $A = 2$. A $Ma = 104.4$, l'écoulement se déstabilise via une bifurcation fourche sous-critique donnant lieu à deux branches d'écoulements stationnaires instables symétriques l'un de l'autre par rapport au plan médian. Les écoulements se restabilisent via une bifurcation noeud-col à $Ma = 57.2$. Pour $Ma \in [57.2, 104.4]$, il existe donc trois écoulements stationnaires stables : un écoulement symétrique par rapport au plan médian et deux écoulements brisant cette symétrie et image l'un de l'autre par symétrie par rapport au plan médian. Pour $Ma > 104.4$, seuls sont stables les deux écoulements dont la symétrie par rap-

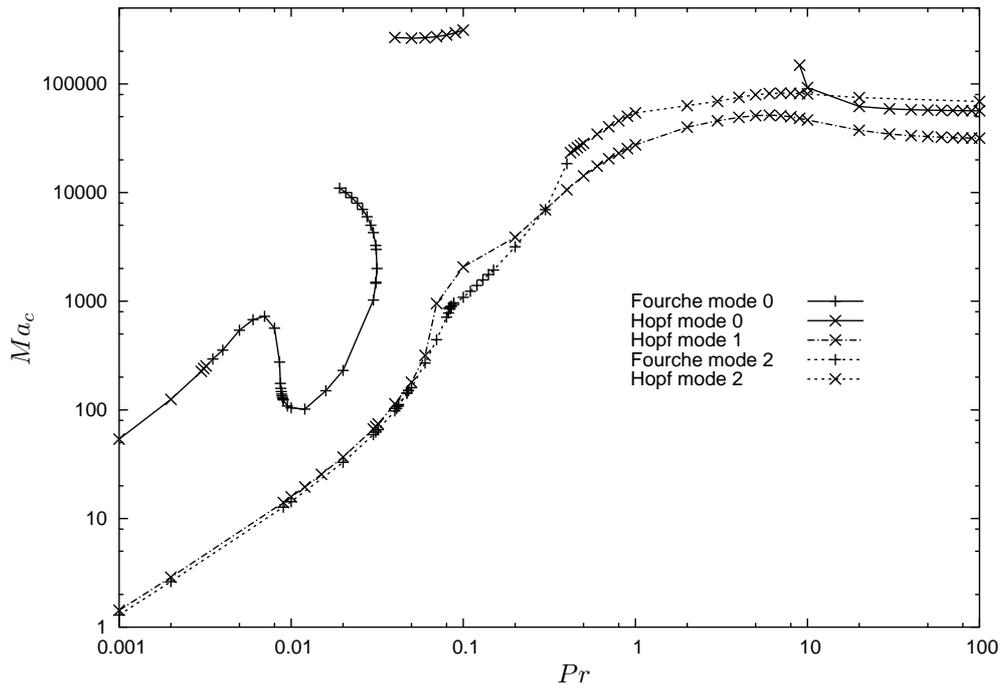
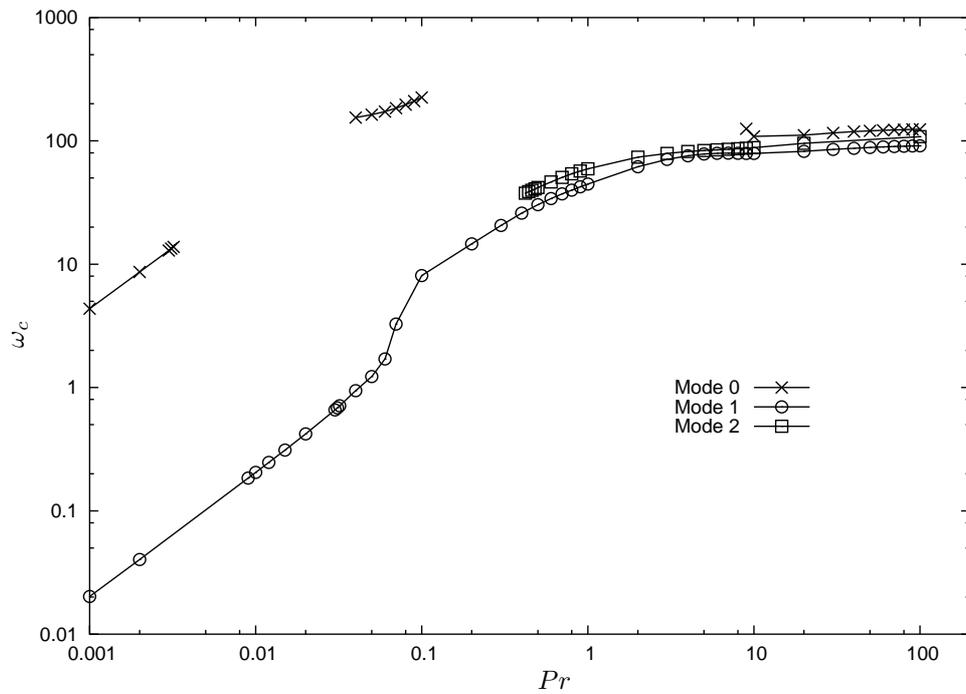
FIG. 3.6 – Seuils d'instabilité des modes 0, 1 et 2 en fonction de Pr 

FIG. 3.7 – Pulsation critique de la bifurcation de Hopf des modes 0, 1 et 2

port au plan médian est brisée. Ces états sont inobservables en demi-zone car celle-ci ne possède pas de plan de symétrie comme la zone-flottante. Ces écoulements multiples ayant été observés pour la première fois par Chénier *et al.* [17], se pose la question de leur existence pour d'autres valeurs du nombre de Prandtl. La figure 3.9 donne les seuils d'instabilité en nombre de Marangoni et la nature des bifurcations de l'état symétrique stationnaire pour une large plage du nombre de Prandtl. La figure 3.10 fournit les pulsations aux seuils d'instabilité pour les bifurcations de Hopf.

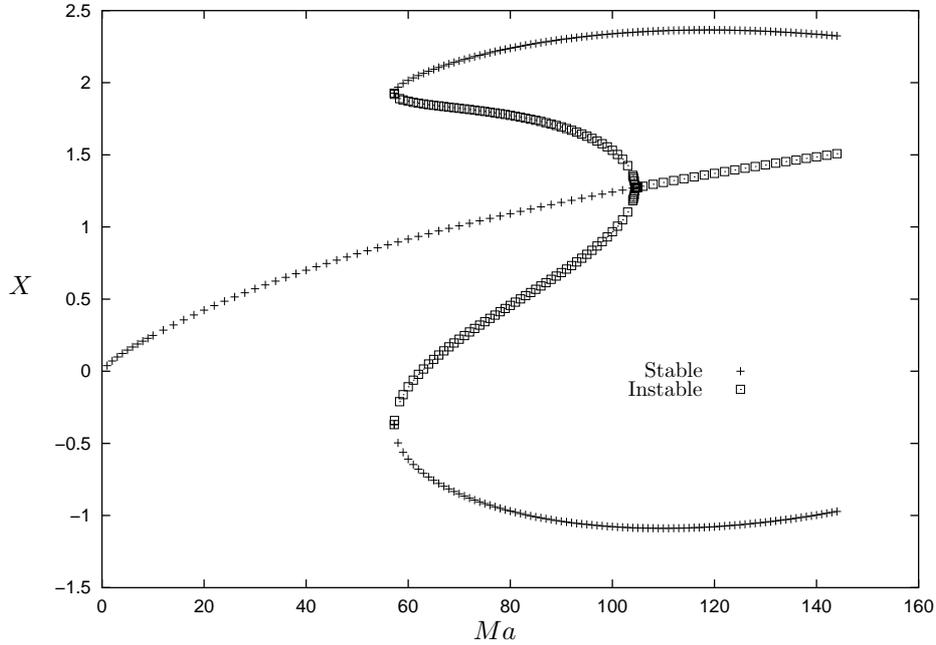


FIG. 3.8 – Diagramme de bifurcation du mode 0 pour $Pr = 0.01$

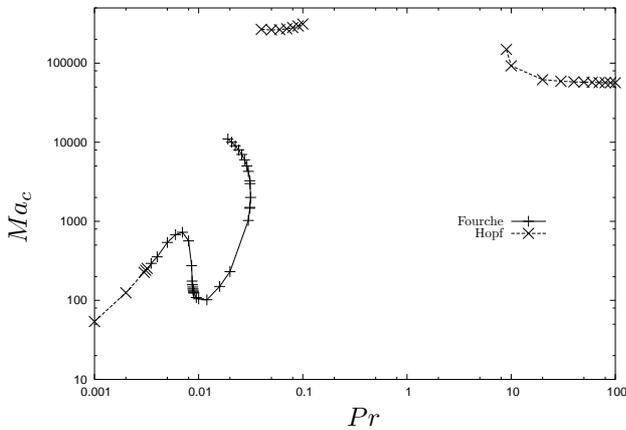


FIG. 3.9 – Seuil d'instabilité du mode 0 en fonction de Pr

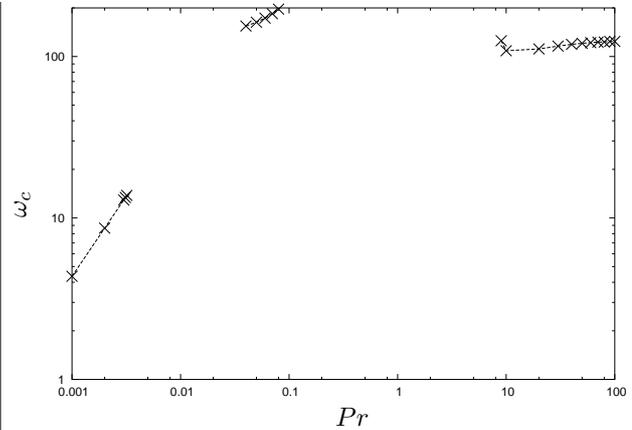


FIG. 3.10 – Pulsation critique de la bifurcation de Hopf pour le mode 0

D'après le diagramme de stabilité 3.9, l'écoulement se déstabilise à faible Pr (entre $Pr = 0.001$ et $Pr = 0.0034$) via une bifurcation de Hopf, puis via une bifurcation fourche entre $Pr = 0.0034$ et $Pr = 0.03117$. Une branche représentant une bifurcation de Hopf se situe entre $Pr = 0.04$ et $Pr = 0.1$ à très haut Marangoni ainsi qu'entre $Pr = 10$ et $Pr = 100$.

La figure 3.11 donne les seuils des deux premiers modes déstabilisants au voisinage de $Pr = 0.0034$ où nous observons un point de co-dimension 2. Il est également à noter sur la figure 3.9 que sur la plage de nombre de Prandtl compris entre $Pr = 0.02597$ et $Pr = 0.03117$ l'écoulement se restabilise

à haut nombre de Marangoni. Cette restabilisation via une bifurcation fourche peut se faire selon deux scénarios, illustrés par les figures 3.12 et 3.13 à $Pr = 0.03$. L'un, dit sous-critique, prédit que l'écoulement se restabilise par une bifurcation fourche sous-critique après que celui-ci ait subi une cascade de bifurcations nœuds-cols. L'autre, dit sur-critique, prédit que l'écoulement se restabilise via une bifurcation fourche sur-critique avec laquelle il est certain d'observer des états multiples stables après le seuil à $Ma_c = 4286$, tout comme avant $Ma_c = 1024$.

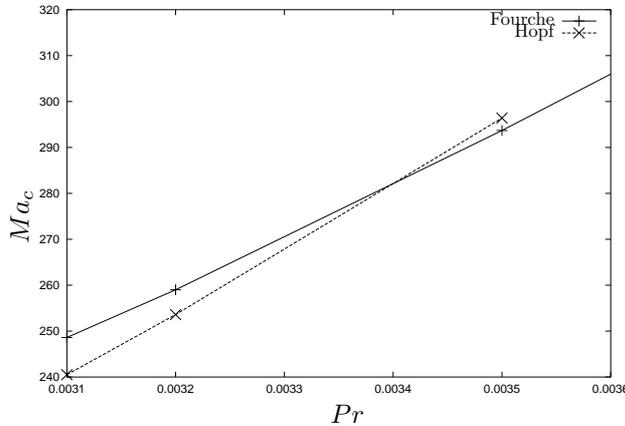


FIG. 3.11 – Détail du seuil d'instabilité du mode 0 de la figure 3.9

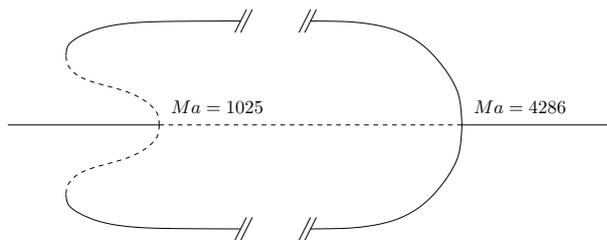


FIG. 3.12 – Scénario de restabilisation sous-critique à $Pr = 0.03$

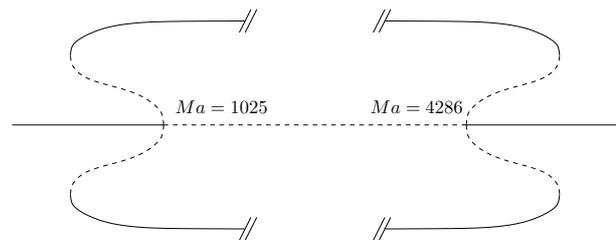


FIG. 3.13 – Scénario de restabilisation sur-critique à $Pr = 0.03$

Dépendance du seuil et de la pulsation critique en fonction du nombre de Prandtl.

À faibles nombres de Prandtl (*c.f.* diagrammes 3.9 et 3.10), le seuil de la bifurcation de Hopf et sa pulsation critique dépendent linéairement du nombre de Prandtl. En effectuant une régression linéaire sur le seuil, nous obtenons comme meilleure approximation la droite d'équation $y = 91201x - 44.6$ avec un coefficient de corrélation de 0.995. De même, la meilleure approximation pour la pulsation critique est la courbe d'équation $y = 4111x^{0.991}$ avec un coefficient de corrélation de 0.999994. Les seuils d'instabilité et la pulsation critique sont superposés à leur meilleure approximation respectivement sur les figures 3.14 et 3.15.

Pour les grands nombres de Prandtl (supérieurs à 10), le seuil de transition de la bifurcation de Hopf et la pulsation critique ne semblent plus dépendre du nombre de Prandtl. La valeur asymptotique du seuil semble se situer autour de $Ma_c = 56500$ et la pulsation critique autour de $\omega_c = 124$.

Aux faibles nombres de Prandtl, le seuil de stabilité dépend linéairement du nombre de Prandtl, donc le rapport $Re = Ma/Pr$ est constant. La perturbation est donc hydrodynamique. Aux grands nombres de Prandtl, le seuil de stabilité ne dépend pas du nombre de Prandtl. La perturbation est donc hydrothermale. Ceci avait déjà été observé sur une plage plus restreinte de valeurs de Pr en zone-flottante par Kasperski *et al.* [50], mais avec une régularisation $n = 1$. Le code utilisé était un code temporel avec lequel la détermination très précise des seuils est laborieuse.

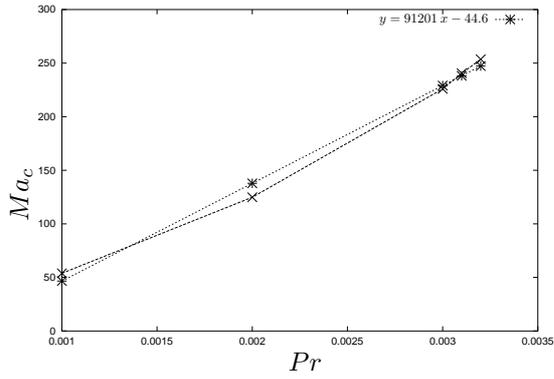


FIG. 3.14 – Marangoni critique du mode 0, bifurcation de Hopf à faibles nombres de Prandtl, et son approximation linéaire

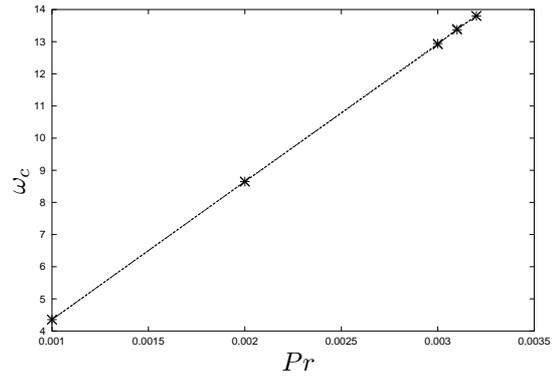


FIG. 3.15 – Pulsation critique du mode 0, bifurcation de Hopf à faibles nombres de Prandtl, et sa meilleure approximation

La suite porte sur l'étude des écoulements et perturbations dominantes qui leur sont associées. La courbe de stabilité de la figure 3.9 sera partagée en segments sur lesquels sera étudié un écoulement caractéristique. Le premier segment concerne l'intervalle de nombres de Prandtl $[0.001; 0.0034]$ sur lequel la bifurcation est une bifurcation de Hopf. L'écoulement étudié sera à $Pr = 0.002$. Ensuite l'écoulement à $Pr = 0.01$ se déstabilise par une bifurcation fourche sur l'intervalle $[0.0035, 0.0315]$. Une restabilisation de l'écoulement à $Pr = 0.02$ est observée lorsque le nombre de Marangoni augmente sur l'intervalle $[0.019, 0.0312]$. Si le nombre de Marangoni augmente encore, par exemple à $Pr = 0.06$, une bifurcation de Hopf est observée sur l'intervalle $[0.04, 0.1]$. Ceci termine l'étude à bas nombres de Prandtl. A hauts nombres de Prandtl, nous trouvons seulement une bifurcation de Hopf qui sera analysée à $Pr = 20$ et $Pr = 100$.

3.2.2.1 Prandtl=0.002, transition par bifurcation de Hopf

Le seuil d'instabilité à $Pr = 0.002$ se situe à $Ma_c = 124.8$ avec une pulsation critique $\omega_c = 8.65$. L'écoulement, dont une représentation à $Ma = 130$ est donnée sur la figure 3.16, se déstabilise via une bifurcation de Hopf dont le mode propre dominant, à $Ma = 130$, est représenté sur la figure 3.17.

Le champ stationnaire est constitué de deux cellules contrarotatives (*c.f.* figure 3.16), symétriques par rapport au plan médian. Quatre cellules de recirculation se trouvent proches de l'axe du cylindre, du côté des fronts solides et de part et d'autre du plan médian. L'écart entre les isolignes de la fonction de courant étant constant sur la figure 3.16, les recirculations ont été rendues visibles sur la fonction de courant de l'écoulement oscillant (*c.f.* figure 3.24) obtenu à $Ma = 140$. Les maxima de la vitesse radiale sont proches des front solides et du point triple, et également de part et d'autre du plan médian en $r \simeq 0.5$; les maxima de la vitesse axiale sont sur la surface libre. Le champ de température a son maximum au milieu de la surface libre.

Comme cela a été exposé au chapitre 2, la conjonction de l'adhérence du fluide sur les fronts solides et du gradient de température non nul sur la surface libre près des fronts solides entraîne une singularité de la vorticité à la ligne de contact solide / fluide. Cette singularité a été régularisée grâce à une fonction polynômiale, néanmoins les gradients de vorticité restent très élevés dans cette région comme le montre la figure 3.20, et ce d'autant plus que le polynôme de régularisation est de degré élevé.

Le champ de vorticité est fortement convecté par l'écoulement. Une langue de vorticité part des fronts solides pour se retrouver proche de la surface libre au niveau du plan médian, créant une petite zone où elle change radialement (par exemple sur le segment en $z = 0.1$ et entre $r = 0.6$ et $r = 1$) deux fois de signe. La convection de la vorticité est telle que les deux langues de vorticité viennent des fronts solides pour se faire piéger entre les deux cellules.

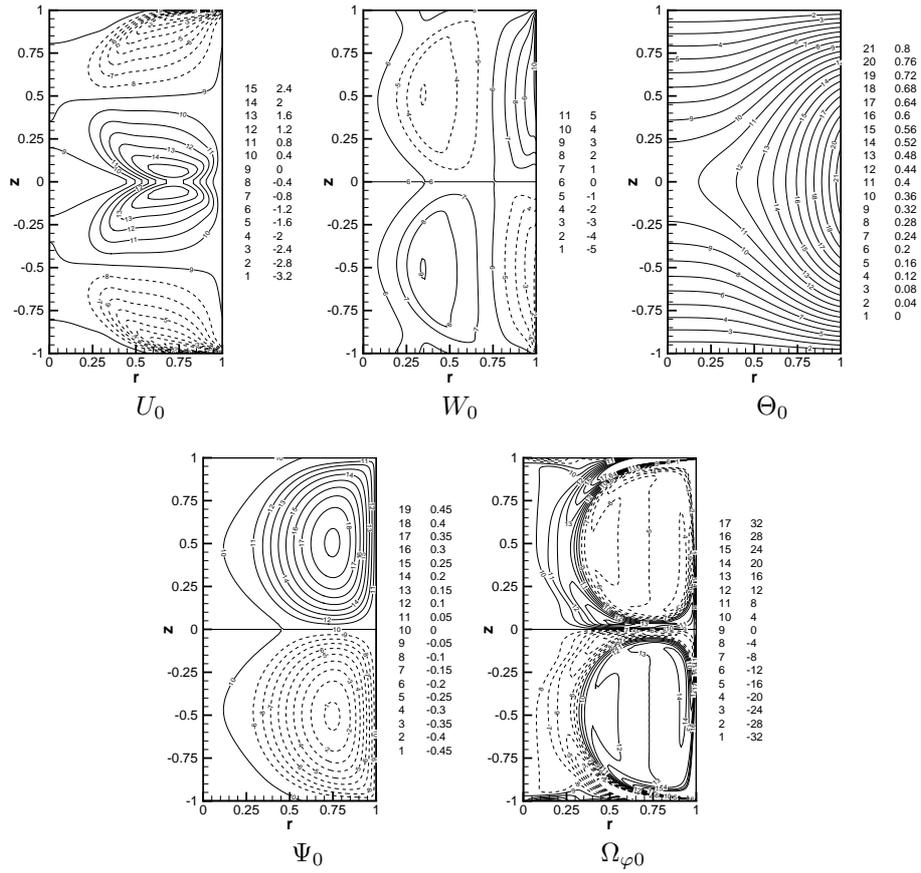


FIG. 3.16 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 , fonction de courant Ψ_0 et rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ du champ stationnaire \mathcal{U}_0 instable pour $Pr = 0.002$, $Ma = 130$ et $N = 100 \times 150$

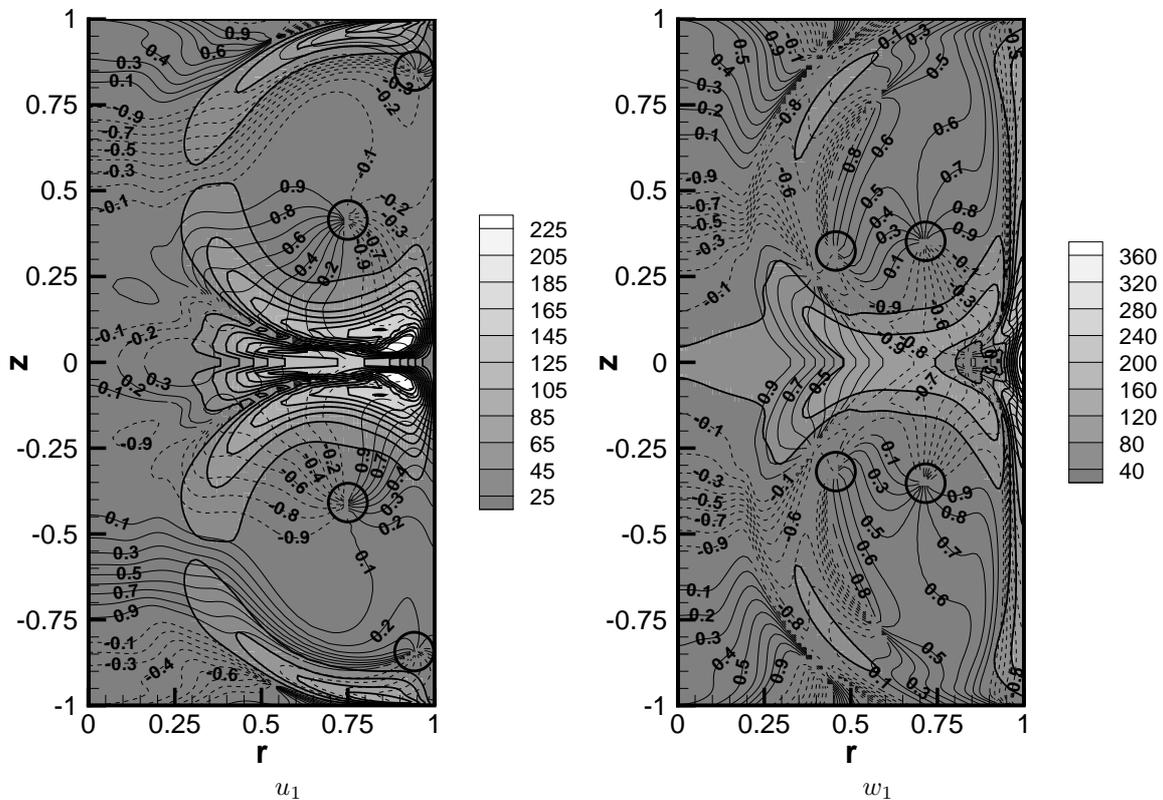


FIG. 3.17 – Vitesses radiale u_1 et axiale w_1 de la perturbation dominante de mode 0 u_1 du champ stationnaire 3.16

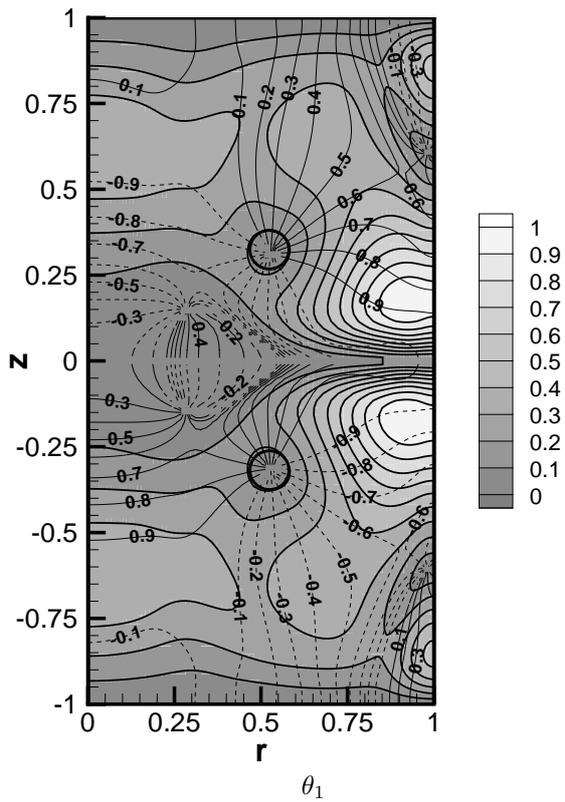


FIG. 3.18 – Température θ_1 de la perturbation dominante de mode 0 w_1 du champ stationnaire 3.16 à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$

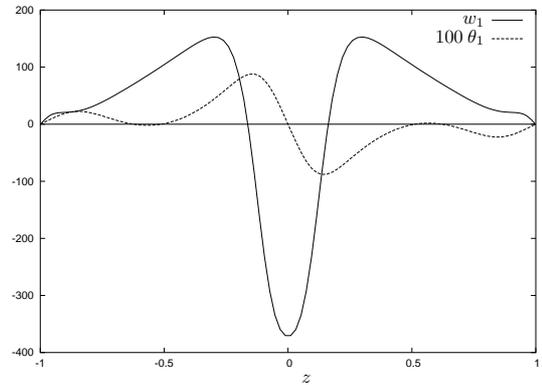


FIG. 3.19 – Vitesse axiale et température à la surface libre de la perturbation à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$

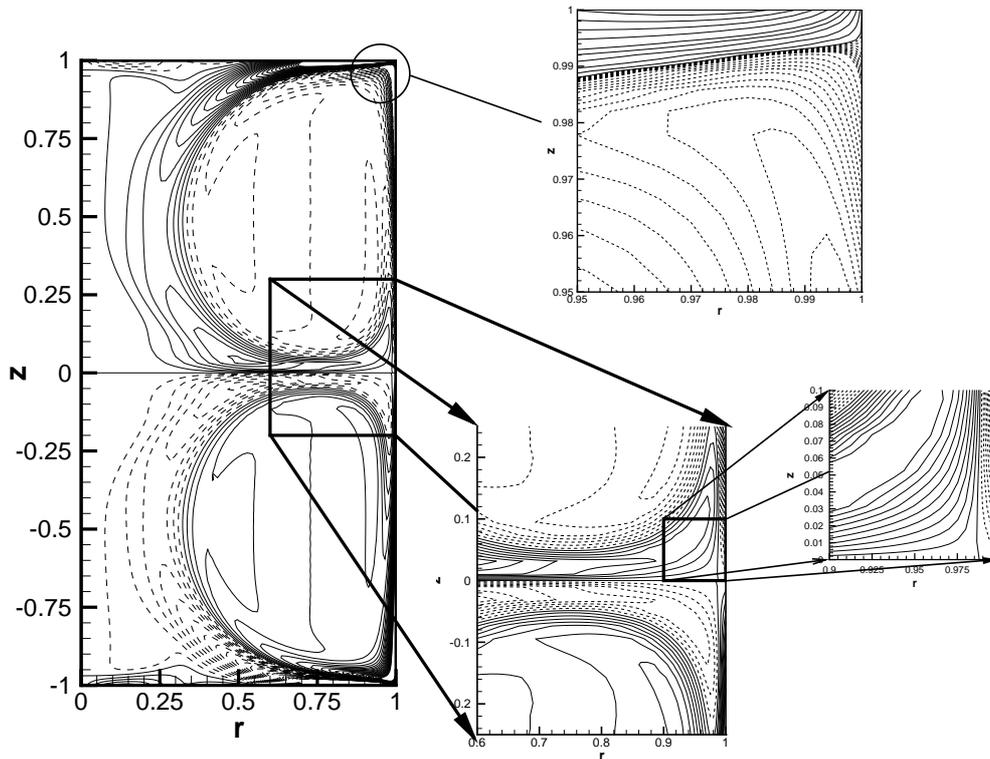


FIG. 3.20 – Détails du champ de vorticité de l'écoulement stationnaire à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$

La figure 3.17 représente les composantes de la perturbation du champ stationnaire. Il est délicat de représenter la perturbation propre dominante en sa décomposition partie réelle / partie imaginaire car il faudrait imaginer la perturbation recomposée et se figurer la manière dont elle oscille. Le mieux serait de représenter plusieurs images de la perturbation sur une période, nous n'avons pas choisi cette méthode. Nous avons opté pour une représentation en module / phase qui permet d'identifier les endroits qui oscillent avec la plus grande amplitude et les points de stagnation. De même, c'est aux endroits où la phase varie rapidement que se trouvent les vitesses qui peuvent varier rapidement dans une zone de faible extension spatiale. Sur la figure 3.17, les bandes grisées représentent le module du mode propre. Les isophases sont en traits pleins et pointillés sur lesquels se trouvent des valeurs allant de -1 à 1 . Pour une valeur positive x , la phase est $x\pi$. Pour une valeur négative x , la phase est $(-1 - x)\pi$. La raison en est qu'à la lecture de la phase, les lignes en opposition de phase sont facilement repérables, elles sont de signe opposé.

Pour éclaircir ce qui vient d'être énoncé, prenons un champ u dépendant du temps de la forme :

$$2u(r, z, t) = (u_r(r, z) + iu_i(r, z))(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + (u_r(r, z) - iu_i(r, z))(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \quad (3.2)$$

Le module de ce champ est défini par $u_m(r, z) = \sqrt{u_r^2(r, z) + u_i^2(r, z)}$ et on cherche la phase φ telle que $u(r, z, t) = u_m(r, z)\cos(\omega t + \varphi(r, z))$. Les isophases représentées sont le résultats de la transformation, précédemment décrite, de φ .

Le module de la vitesse radiale du mode propre dominant (*c.f.* figure 3.17) possède deux maxima proches du plan médian et de la surface libre. Deux minima nuls, entourés d'un cercle sur la figure, sont proches du centre des cellules de l'écoulement stationnaire et deux autres sont proches des points triples et de la surface libre. Le module de la vitesse axiale est maximal au milieu de la surface libre. De nombreux minima nuls sont présents, mais quatre sont remarquables : deux se trouvent, comme pour le module de la vitesse radiale, proches du centre des cellules de l'écoulement stationnaire et deux autres sont en $r \simeq 0.5$ et $z \simeq \pm 0.3$. Ces deux derniers sont au mêmes endroits que deux minima nuls du module de la température de la perturbation. Le module de la température de la perturbation est maximal sur la surface libre, en $z = \pm 0.15$. Les minima nuls sont au nombre de six : deux se trouvent presque au milieu de chaque demi cavité, deux autres sont proches des fronts solides sur la surface libre et les deux derniers sont proches de l'axe de part et d'autre du plan médian. Lorsque

le champ stationnaire est perturbé par ce mode propre, l'amplitude absolue maximale se situe pour les composantes de la vitesse de la perturbation proche du plan médian et de la surface libre, et, pour la température de la perturbation, elle se situe proche du plan médian sur la surface libre. La représentation de la perturbation sur la figure 3.17 permet de mettre en évidence des points fixes sur les composantes de la vitesse et la température de la perturbation θ_1 . Ces points fixes correspondent aux points dont le module des composantes de la perturbation est nul et c'est à ces endroits que l'écoulement n'est pas perturbé par ces composantes.

La phase de la vitesse radiale de la perturbation est antisymétrique par rapport au plan médian alors que la vitesse radiale de l'écoulement stationnaire est symétrique par rapport à ce même plan. La phase de la vitesse axiale de la perturbation est symétrique par rapport au plan médian alors que la vitesse axiale de l'écoulement stationnaire est antisymétrique par rapport à ce plan. La phase de la température de la perturbation est antisymétrique par rapport au plan médian alors que la température est symétrique par rapport au plan médian. Quand les composantes du champ stationnaire sont symétriques, celles du mode propre sont antisymétriques, et inversement.

Considérons la perturbation au temps $t = 0$. La température et la vitesse axiale de la perturbation sur la surface libre, à cet instant, sont représentées sur la figure 3.19. Lorsque la vitesse w_1 de la perturbation est positive, elle est orientée dans le sens des z croissants. La vitesse axiale et le gradient axial de température ont la même orientation : le fluide de la perturbation va des points froids vers les points chauds. C'est un mécanisme opposé à celui de la convection thermocapillaire, ce qui signifie que la vitesse de l'instabilité n'est pas fortement couplée à la thermique. La vitesse de l'instabilité est gérée par une source se trouvant dans la cavité, ce qui en fait une instabilité hydrodynamique. De plus, la valeur adimensionnelle maximale de la température de la perturbation est de deux ordres de grandeur moindre que la vitesse de la perturbation alors que la température de l'écoulement stationnaire est du même ordre que la vitesse de l'écoulement stationnaire. La perturbation est alors plus importante sur les composantes de vitesse que sur la température.

Les zones de la perturbation proches du plan médian et de la surface libre sont celles où les composantes de vitesse du mode propre dominant sont les plus élevées. Ces zones interviennent significativement dans les bilans d'énergie. L'évolution des différents termes contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique de la perturbation est représentée sur le graphique 3.21 en fonction du nombre de Marangoni, les différents termes ayant été normalisés par la dissipation visqueuse. L'erreur relative commise sur ces termes, $\delta_{\dot{e}_c}$ et $\delta_{\dot{e}_\theta}$, est inférieure à $10^{-3}\%$.

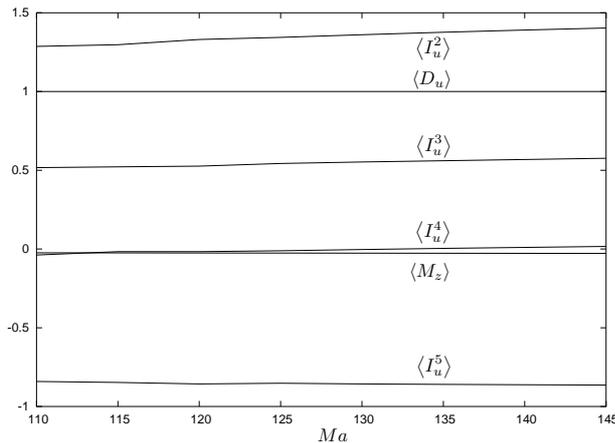


FIG. 3.21 – Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation $\langle D_u \rangle$. $Pr = 0.002$, $k = 0$

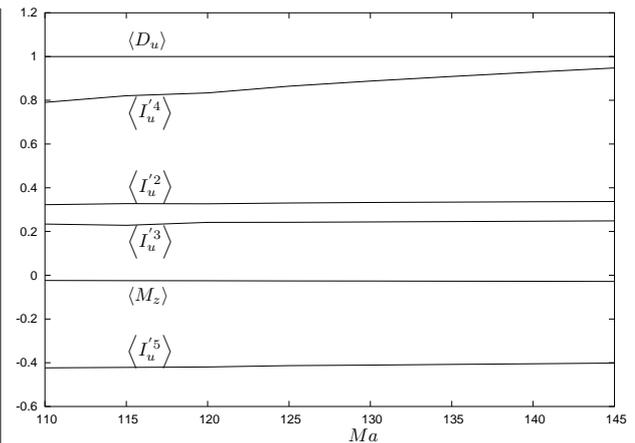


FIG. 3.22 – Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation $\langle D_u \rangle$. $Pr = 0.002$, $k = 0$

Parmi les termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique, sur la figure 3.21, le dominant est l'intégrale $\langle I_u^2 \rangle = -\int u^2 \partial_r U_0$ qui mesure l'amplification de la vitesse radiale u_1

de la perturbation par le transport convectif radial (par u_1) du gradient radial de la vitesse radiale U_0 de l'écoulement stationnaire. Selon Wanschura *et al.* [109], ce sont les phénomènes physiques intervenant dans la constitution du terme dominant, autres que la dissipation, qui sont à l'origine du mécanisme de déstabilisation. Cependant, la variation de l'énergie cinétique résulte du bilan entre la dissipation visqueuse, les termes croissants $\langle I_u^2 \rangle$, $\langle I_u^3 \rangle = -\int uw\partial_z U_0$, $\langle I_u^4 \rangle = -\int wu\partial_r W_0$ et le terme décroissant $\langle I_u^5 \rangle = -\int w^2\partial_z W_0$. Si la valeur relative des différents termes par rapport à la dissipation visqueuse est importante, le taux de croissance ou de décroissance des différents termes est également important. $\langle I_u^2 \rangle$ est à la fois le terme dominant en valeur et en taux de croissance.

Le terme dominant avec une décomposition en composantes centrifuges, dont on peut voir l'évolution des termes sur le graphique 3.22, est $\langle I_u'^4 \rangle = -\int \vec{u}_\parallel \cdot (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0$. Sa distribution spatiale, $\langle i_u'^4 \rangle$, ainsi que celle du taux de croissance de l'énergie cinétique $\langle \dot{e}_c \rangle$ et du terme dominant pour la décomposition naturelle sont données sur la figure 3.23. On peut noter le bon accord entre les deux distributions spatiales $\langle \dot{e}_c \rangle$ et $\langle i_u'^4 \rangle$, meilleur qu'avec $\langle i_u^2 \rangle$. Pour approcher la distribution $\langle \dot{e}_c \rangle$ des termes naturels, il est nécessaire de sommer $\langle i_u^2 \rangle$ à $\langle i_u^3 \rangle$. Ces figures sont à comparer à la figure 3.17 : les maxima de $|u_1|$, $\langle i_u'^4 \rangle$ et $\langle \dot{e}_c \rangle$ se situent tout près du plan médian et de la surface libre.

On peut noter qu'à l'endroit où $\langle r\dot{e}_c \rangle$ est maximal, proche de la surface libre de part et d'autre du plan médian, la vorticité est localement minimale ou maximale dans la direction axiale. En amont de cette langue de vorticité (suivant le sens de l'écoulement) à $r \simeq 0.5$, se trouve un extrémum de vorticité. Selon le critère de Fjørtoft [31] concernant la stabilité d'un écoulement parallèle invicidé, une instabilité pourrait se développer à cet endroit. Bien que notre écoulement ne soit pas invicidé et parfaitement parallèle, et que le critère ne porte que sur la stabilité et non pas l'instabilité de l'écoulement, nous pouvons suggérer un mécanisme de déstabilisation. La perturbation naîtrait d'un coté ou de l'autre du plan médian là où la vorticité admet un extrémum local en $r \simeq 0.5$. Après avoir longé le plan médian, cette instabilité serait amplifiée à l'approche de la surface libre et convectée le long de celle-ci pour s'éteindre sur le front solide. Durant ce temps, l'écoulement dans l'autre demi-cavité a lui aussi été perturbé, ce qui provoque une instabilité du même type que celle précédemment décrite. On observe ainsi un écoulement alterné. De plus, la vitesse à la surface libre ne subit pas de grandes variations car elle est gérée par la température qui est diffusive.

3.2.2.2 Structure des écoulements oscillants à $Pr = 0.002$

Nous nous sommes placés à $Pr = 0.002$ et à $Ma = 140$, au delà du seuil qui se trouve à $Ma_c = 124.8$. L'écoulement que nous présentons est instationnaire établi de pulsation $\omega = 5.23$ et de période $\tau = 1.2$. Nous avons représenté les composantes de l'écoulement aux instants $t = 0$, $t = \tau/6$, $t = \tau/3$ et $t = \tau/2$. Ces composantes sont la fonction de courant Ψ et son détail de part et d'autre du plan médian pour $r \in [0.8, 1]$ sur la figure 3.24, la température Θ sur la figure 3.25 et finalement la vorticité de part et d'autre du plan médian pour $r \in [0.5, 1]$ sur la figure 3.26.

L'oscillation concerne essentiellement la fonction de courant et la vorticité. La fonction de courant est principalement affectée à proximité du plan médian. Du coté de l'axe, les recirculations se connectent avec les cellules principales de l'écoulement. La température oscille imperceptiblement, elle est dominée par la diffusion.

La vorticité oscille de part et d'autre du plan médian, faisant remonter alternativement les langues de vorticité le long de la surface libre, du plan médian vers les fronts solides. Ces langues de vorticité ne modifient pas la vorticité produite au point triple et descendant le long des cellules de convection.

Nous avons vu avec la décomposition du taux de croissance de l'énergie cinétique que les zones de l'écoulement sensibles aux perturbations se situent proche de la surface libre, de part et d'autre du plan médian. C'est également à cet endroit que se produisent les oscillations de l'écoulement.

Pour vérifier que la perturbation est hydrodynamique, il suffit de prendre le champ stationnaire instable, de figer sa température et de laisser évoluer les variables de vitesse. S'il se déstabilise, la température ne joue pas de rôle, sinon elle en joue un. Ici, l'écoulement est toujours instable via la bifurcation de Hopf, que sa température soit constante ou fixée à la valeur qu'elle avait lorsque le

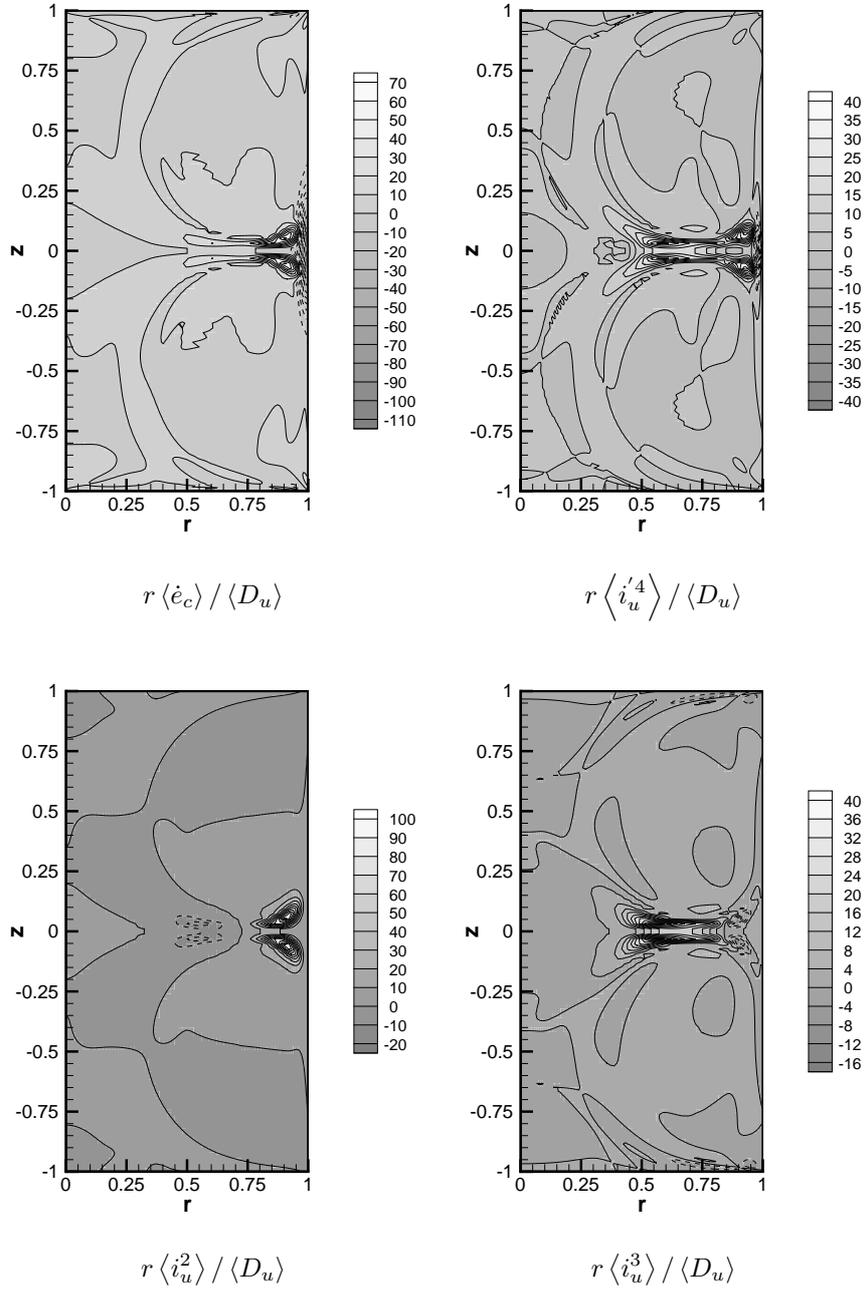


FIG. 3.23 – Distributions spatiales $\langle \dot{e}_c \rangle$, $\langle i_u^4 \rangle$, $\langle i_u^2 \rangle$ et $\langle i_u^3 \rangle$ multipliées par r et normalisées par $\langle D_u \rangle$. $Pr = 0.002$, $Ma = 130$, $k = 0$

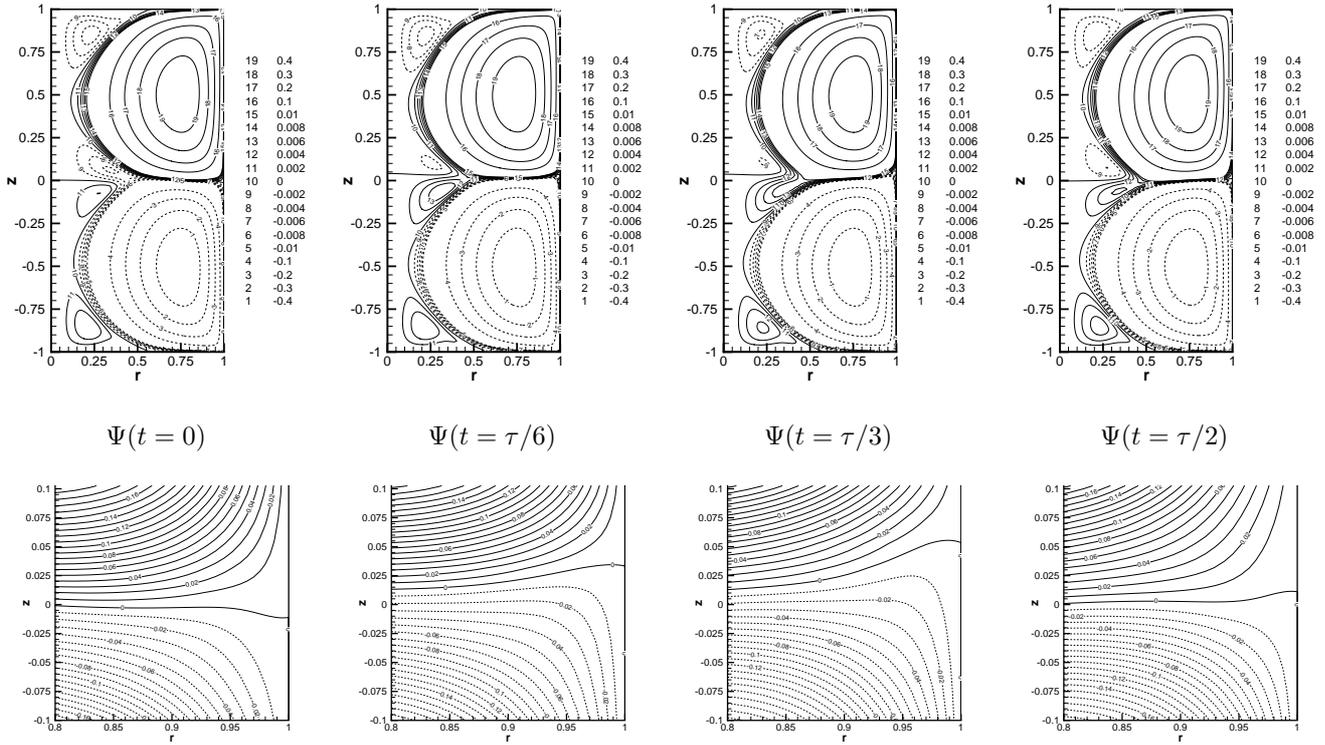


FIG. 3.24 – Fonction de courant sur une demi-période $\tau/2$ et son détail à $Pr = 0.002$, $Ma = 140$

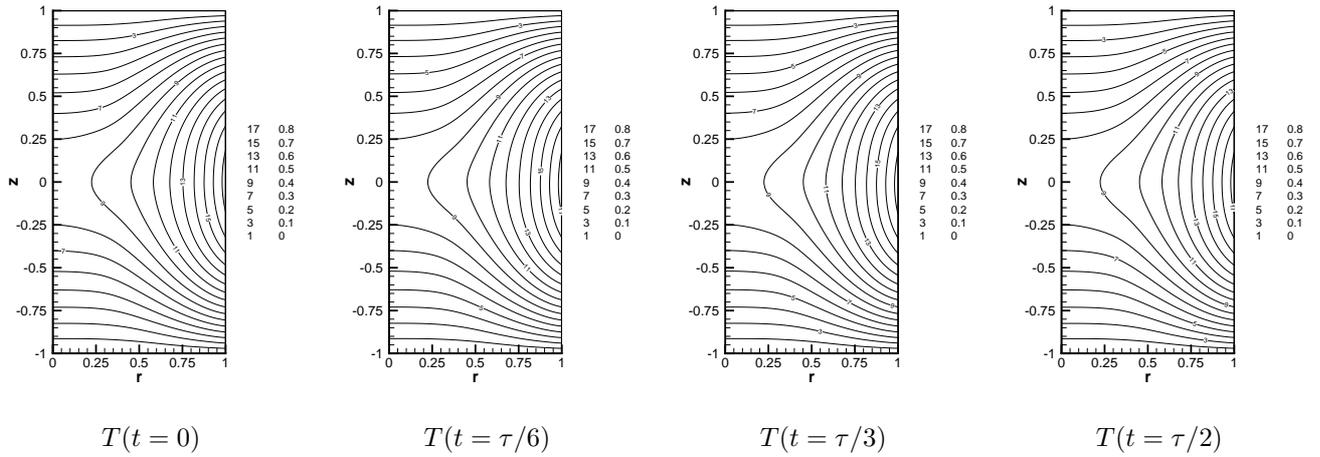


FIG. 3.25 – Température sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 0.002$, $Ma = 140$

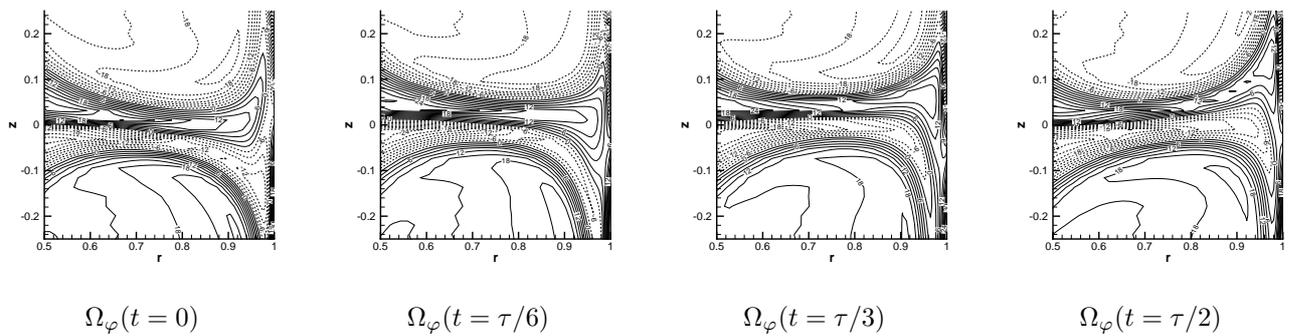


FIG. 3.26 – Vorticité sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 0.002$, $Ma = 140$

champ était stationnaire.

3.2.2.3 Prandtl=0.01, transition par bifurcation fourche

L'écoulement pour ces paramètres a déjà été décrit par Chénier *et al.* [17]. Cet écoulement et sa perturbation propre dominante sont représentés sur la figure 3.27; l'écoulement se déstabilise via une bifurcation fourche sous critique (*c.f.* figure 3.8). L'écoulement stationnaire est semblable à celui rencontré en 3.2.2.1 à ceci près que la langue de vorticité, lorsqu'elle descend le long des cellules des fronts solides vers le plan médian, s'approche moins de la surface libre. Comme   $Pr = 0.002$, les maxima de la vitesse radiale sont proches des fronts solides et du point triple et également de part et d'autre du plan médian en $r \simeq 0.5$; les maxima de la vitesse axiale sont sur la surface libre. Le champ de température est toujours diffusif, son maximum est au milieu de la surface libre.

Le mode propre dominant présente également un maximum de vitesse radiale proche du plan médian   $r \simeq 0.5$. La température est maximale sur la surface libre, en $z = \pm 0.5$. Il est   noter que le mode propre ne présente pas la même symétrie de réflexion, par rapport au plan médian, que l'état stationnaire : lorsque les composantes du champ stationnaire sont symétriques, celles du mode propre sont anti-symétriques, et inversement. La vitesse axiale de la perturbation est positive sur la surface libre, donc, sur la surface libre, le liquide de la perturbation part de $z = -1$ avec une température nulle, passe en $z \simeq -0.5$ avec une température négative puis en $z \simeq 0.5$ avec une température positive pour arriver en $z = 1$ avec une température nulle. Ce comportement combine les mécanismes   la fois thermocapillaire et non thermocapillaire sur la surface libre. Les propriétés de symétrie de l'état stationnaire et du premier mode propre conduisent   une bifurcation fourche de l'état stationnaire [19]. La brisure de symétrie résulte de ce que la symétrie des composantes du mode propre est contraire   la symétrie des composantes de l'écoulement stationnaire, ce qui augmente les composantes d'un coté du plan médian et les diminue de l'autre coté de ce plan.

L'évolution des différents termes contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique de la perturbation est représentée sur le graphique 3.28 en fonction du nombre de Marangoni et normalisées par la dissipation visqueuse. L'erreur relative commise sur ces termes, $\delta_{\dot{e}_c}$ et $\delta_{\dot{e}_\theta}$, est inférieure   $10^{-3}\%$. Le terme de couplage M_z entre la dynamique et la thermique n'est pas le terme dominant, la déstabilisation de l'écoulement n'est alors pas d'origine thermique. Le terme d'échange d'énergie dominant est $I_u^4 = - \int w u \partial_r W_0$; mais il décroit, de la même manière que $I_u^2 = - \int u^2 \partial_r U_0$. Cette décroissance est compensée par la croissance de $I_u^3 = - \int u w \partial_z U_0$ d'une part et $I_u^5 = - \int w^2 \partial_z W_0$ dans une moindre mesure d'autre part.

Ce sont les termes de transfert naturels par la vitesse axiale (I^3 et I^5) qui sont déstabilisants et ceux de transfert par la vitesse radiale (I^2 et I^4) qui sont stabilisants.   noter la différence avec $Pr = 0.002$ où I_u^2 est dominant et semble jouer un rôle prépondérant dans la déstabilisation. Sur la figure 3.30, on peut voir que les maxima des distributions spatiales de $I_u^3 + I_u^5$ et \dot{E}_c sont situés de part et d'autre du plan médian, proche de celui ci,   mi-distance entre l'axe et la surface libre, assez proche des maxima de la vitesse radiale du mode dominant; ceux de I_u^4 , qui n'est pas représentée, sont aussi de part et d'autre du plan médian, mais proches de la surface libre et environ   $\pm 1/4$ du plan médian. La zone près du plan médian semble donc être la région la plus active dans ce processus de déstabilisation.

Le terme dominant parmi les termes centrifuges est $I_u'^4 = - \int \vec{u}_\parallel \cdot (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0$. Il est décroissant tout comme $I_u'^2 = - \int \vec{u}_\perp \cdot (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0$ qui est le second en importance. Le terme $I_u'^5 = - \int \vec{u}_\parallel \cdot (\vec{u}_\parallel \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0$, bien que négatif, compense nettement la baisse de $I_u'^4$ et $I_u'^2$. C'est le mécanisme représenté par $I_u'^5$ qui pourrait être   l'origine de la déstabilisation de l'écoulement. Le terme $I_u'^3$ diminue très faiblement comparé aux autres termes, excepté M_z .

On peut remarquer que les distributions spatiales $i_u^3 + i_u^5$ et $i_u'^3 + i_u'^4$ représentent bien les maxima de \dot{e}_c , avec une légère préférence pour la seconde. La distribution $i_u'^4$ apporte une grande contribution comme on peut également le voir sur la figure 3.30, et $i_u'^3$ apporte une correction. D'aucune des deux distributions i_u^3 et i_u^5 n'approche \dot{e}_c aussi bien que $i_u'^4$. Ce sont les mécanismes représentés par ces termes qui devraient rendre l'écoulement instable. Cependant c'est la croissance du terme $I_u'^5$ qui

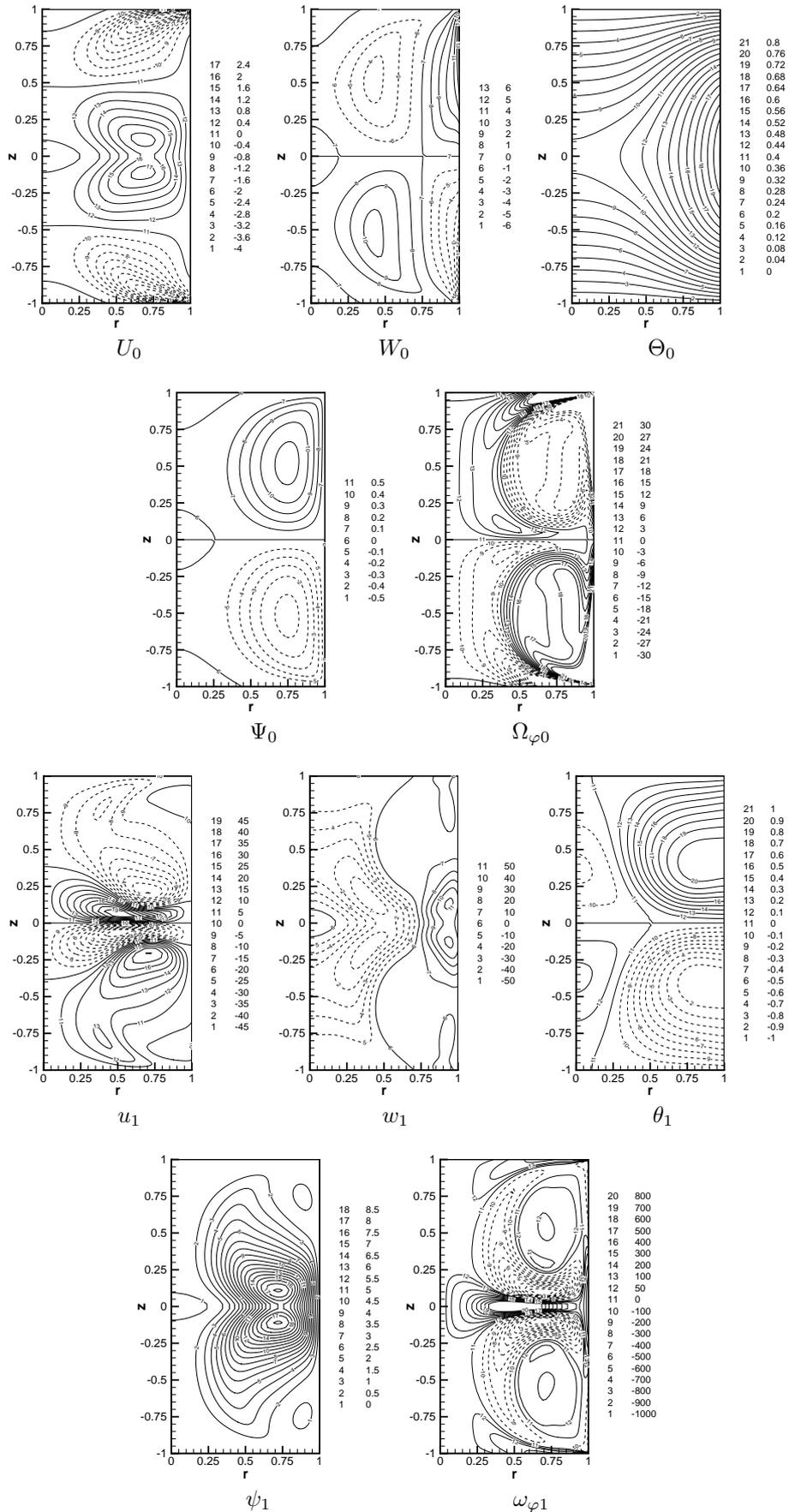


FIG. 3.27 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 , fonction de courant Ψ_0 et rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ du champ stationnaire U_0 et les composantes de vitesses radiale u_1 et axiale w_1 , température θ_1 , fonction de courant ψ_1 et rotationnel $\omega_{\varphi 1}$ de sa perturbation dominante de mode 0 u_1 pour $Pr = 0.01$, $Ma = 106$ et $N = 70 \times 100$

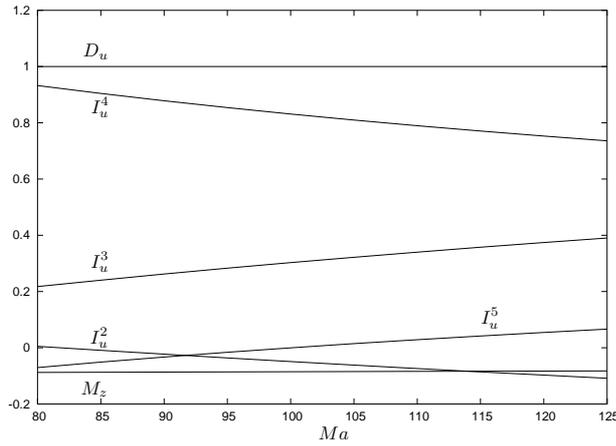


FIG. 3.28 – Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.01$, $k = 0$

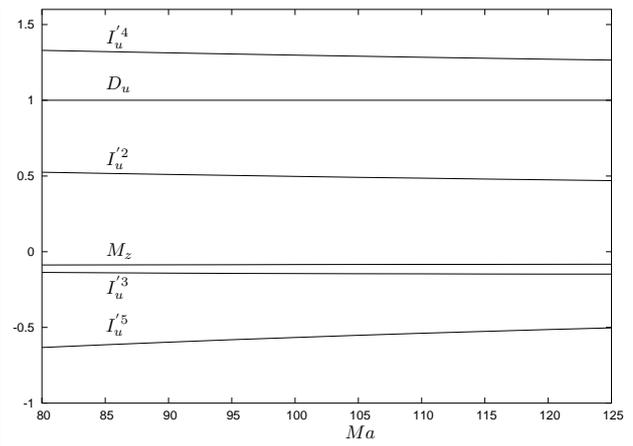


FIG. 3.29 – Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.01$, $k = 0$

serait aussi à l'origine de la déstabilisation alors que $i_u'^5$ n'approche pas \dot{e}_c . Dans la décomposition centrifuge, les termes qui représentent le mieux le taux de croissance de l'énergie cinétique \dot{e}_c , *i.e.* $i_u'^3 + i_u'^4$, ne sont pas ceux qui provoquent la déstabilisation de l'écoulement, *i.e.* $i_u'^5$.

Le terme i_u^3 caractérise l'amplification de la vitesse radiale u_1 de la perturbation par le gradient axial de la vitesse radiale U_0 de l'écoulement de base transporté par la vitesse axiale w_1 de la perturbation. C'est le cisaillement de la vitesse radiale qui alimente en partie la perturbation. L'autre source est i_u^5 qui caractérise l'amplification de la vitesse axiale w_1 de la perturbation par le gradient axial de la vitesse axiale W_0 de l'écoulement de base transporté par la vitesse axiale w_1 de la perturbation. C'est ici un mécanisme d'alimentation convectif qui contribue à l'amplification de la perturbation.

Le terme $i_u'^4$, meilleur représentant du taux de croissance de l'énergie cinétique \dot{e}_c , caractérise l'amplification de la vitesse de la perturbation $\vec{u}_{1\parallel}$ parallèle à l'écoulement par le gradient de la vitesse \vec{U}_0 transporté par la composante de vitesse de la perturbation $\vec{u}_{1\perp}$ orthogonale à l'écoulement. C'est le signe d'une instabilité alimentée en énergie par un mécanisme centrifuge.

La distribution spatiale $r\dot{e}_c$ est maximale là où la vorticit e pr esente un extr emum local. Comme Ch enier [16] l'avait remarqu e, cette zone r epond au crit ere de stabilit e Fj ort oft [31] (page 53). L'instabilit e est amplifi ee  a proximit e du plan m edian, mais elle pourrait avoir son origine proche du point triple et suivre les lignes de courant vers l'axe du cylindre, donc  etre  etir ee et gagner de l' energie pr es du plan m edian. Cette instabilit e remonterait le long de la surface libre, convect ee par la vitesse axiale et perturberait  a nouveau la production de vorticit e  a la surface libre.

3.2.2.4 Prandtl=0.02, restabilisation  a haut Ma

L' ecoulement stationnaire  a $Pr = 0.02$ et $Ma = 10000$ est devenu instable, via une bifurcation fourche,  a $Ma_c = 231$ et est en passe de devenir  a nouveau stable via une bifurcation fourche. Cet  ecoulement et sa perturbation dominante sont repr esent es sur la figure 3.31. Le seuil se situe, pour $Pr = 0.02074$,  a $Ma = 10000$.

La comparaison de l' etat stationnaire  a $Pr = 0.02$, $Ma = 10000$ avec celui obtenu  a $Pr = 0.01$, $Ma = 106$ montre une modification importante des isothermes qui pr esentent deux maxima sur la surface libre en $z = \pm 0.5$ dus aux forts effets thermocapillaires, avec cependant un maximum local en $z = 0$. Les forces thermocapillaires transportent la chaleur apport ee par la source au niveau de $z = 0$ vers les fronts solides plus rapidement qu'elle n'est diffus ee. De plus, du fluide froid est transportée des fronts solides vers la surface libre en passant par le plan m edian o u la vitesse radiale U_0 est plus

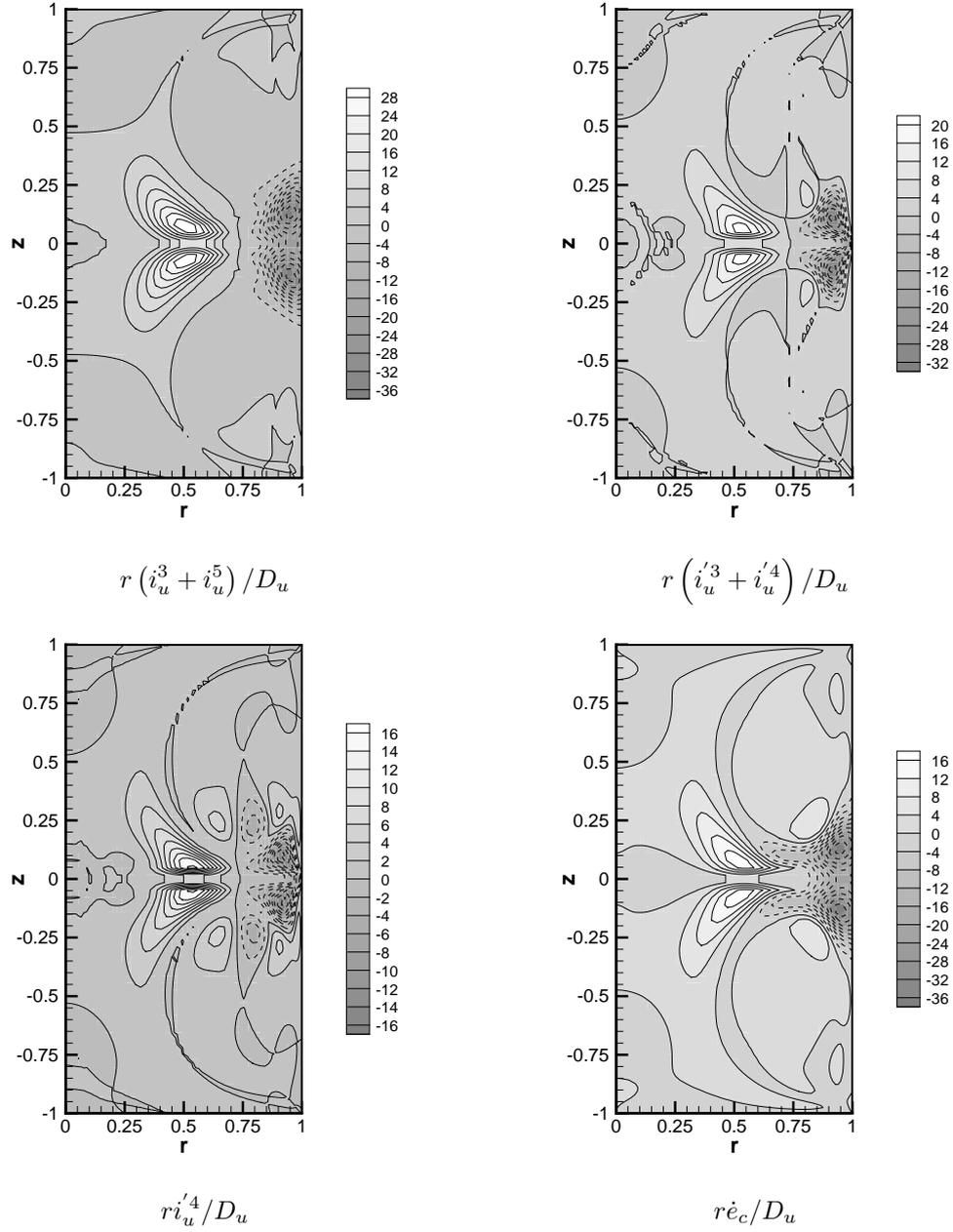


FIG. 3.30 – Distributions spatiales $i_u^3 + i_u^5$, $i_u'^3 + i_u'^4$, $i_u'^4$ et e_c multipliées par r et normalisées par D_u . $Pr = 0.01$, $Ma = 106$, $k = 0$

importante, le fluide n'a donc pas le temps d'accroître sa température et arrive froid sur la surface libre en comparaison avec l'état stationnaire à $Pr = 0.01$, $Ma = 106$. Les structures en zigzag sur le rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ sont dues au fait que le champ n'est pas spatialement convergé et, le rotationnel étant la quantité dont la convergence est la plus difficile, ceci se répercute aussi sur le rotationnel $\omega_{\varphi 1}$ du mode propre dominant. Le maillage utilisé est $N = 81 \times 101$ pour le champ stationnaire et le premier mode propre. Rappelons que lors de la validation de la méthode sur la configuration de demi-zone utilisée par Wanschura *et al.* [109] la valeur du seuil a rapidement convergé alors que le maillage n'était pas suffisant pour représenter correctement la fonction de régularisation à $n = 15$. Ces irrégularités ne sont pas dues à un mauvais traitement graphique du logiciel utilisé car elles persistent après une interpolation sur une grille plus fine. Les défauts disparaissent à partir d'un maillage de $N = 100 \times 150$. Le seuil n'en est pas affecté. On peut remarquer, avec l'observation de la vorticité sur la figure 3.32, que, sur la surface libre, la vorticité change plusieurs fois de signe   cause du gradient axial de la température sur la surface libre qui change lui aussi plusieurs fois de signe. La langue de vorticité qui descend du point triple le long des fronts solides puis de l'axe vient se coincer entre les deux cellules de convection et remonte le long de la surface libre jusqu'  $z = \pm 0.7$.

Le mode propre dominant est similaire   celui vu   $Pr = 0.01$, $Ma = 106$. Les isothermes sont un peu plus déformés, mais c'est la vitesse axiale qui a subi le plus de changements. La cellule de valeurs négatives de la vitesse axiale, proche des points triples, observée   $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$, s'est déplacée vers la surface libre et s'est allongée pour occuper une grande partie de la surface libre, joignant presque les fronts solides.

Un début d'explication de la restabilisation de l'écoulement stationnaire vient de l'observation de la décomposition du taux de croissance de l'énergie cinétique en termes naturels (*c.f.* figure 3.33) et en termes centrifuges (*c.f.* figure 3.34). L'erreur relative commise sur ces termes, $\delta_{\dot{e}_c}$ et $\delta_{\dot{e}_\theta}$, est inférieure   $10^{-3}\%$. La restabilisation a lieu parce que, plusieurs termes naturels contribuant au taux de variation de l'énergie cinétique décroissent de conserve. Par ordre d'importance décroissante : $I_u^3 = - \int uw\partial_z U_0$, $I_u^5 = - \int w^2\partial_z W_0$ et $I_u^4 = - \int wu\partial_r W_0$. Tous les trois sont positifs, mais leur décroissance fait qu'ils ont un effet stabilisant car ils ne compensent plus la dissipation D_u . Le terme $I_u^2 = - \int u^2\partial_r U_0$ est négatif et constant, donc ne joue pas de rôle dans la restabilisation de l'écoulement. M_z croît, mais pas assez rapidement pour garder l'écoulement instable.

Ce même phénomène est visible de manière plus flagrante sur la décomposition du taux de croissance de l'énergie cinétique en termes centrifuges sur la figure 3.34. On y voit clairement une compétition entre le terme centrifuge $I_u^4 = - \int \vec{u}_\perp \cdot \left(\vec{u}_\parallel \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U}_0$ et le terme couplage thermocapillaire M_z . Le terme centrifuge dominant I_u^4 est décroissant avec le plus grand taux de décroissance. Les termes I_u^2 et I_u^5 décroissent eux aussi, mais plus lentement. Seuls les termes I_u^3 et M_z croissent, le premier plus faiblement que le second.

Les termes qui jouent un rôle sont, comme   la section 3.2.2.3, I_u^3 et I_u^5 .   ceci près que c'est leur décroissance qui rend la stabilité   l'écoulement. Un autre point commun entre ces deux écoulements est que les distributions spatiales, non montrées ici, $i_u^3 + i_u^5$ et i_u^4 sont une bonne approximation du taux de croissance local de l'énergie cinétique \dot{e}_c .

Il est   noter la croissance de M_z qui, s'il continue   croître avec le nombre de Marangoni, pourrait entraîner une nouvelle déstabilisation de l'écoulement.

Un mécanisme expliquant la restabilisation peut être donné en s'intéressant   la température et la vitesse axiale de la perturbation sur la surface libre reportées sur la figure 3.35. La vitesse axiale est en accord avec un mécanisme thermocapillaire car elle est dirigée de la région chaude vers la région froide. La contrainte thermocapillaire s'oppose au mécanisme de déstabilisation hydrodynamique. Ceci est corroboré par Levenstam *et al.* [67] qui, pour un mode 2, trouvent que l'instabilité se manifeste plus rapidement sans la présence de la contrainte thermocapillaire. La croissance de M_z s'explique de cette manière, car le couplage entre la thermique et la dynamique augmente avec le nombre de Marangoni.

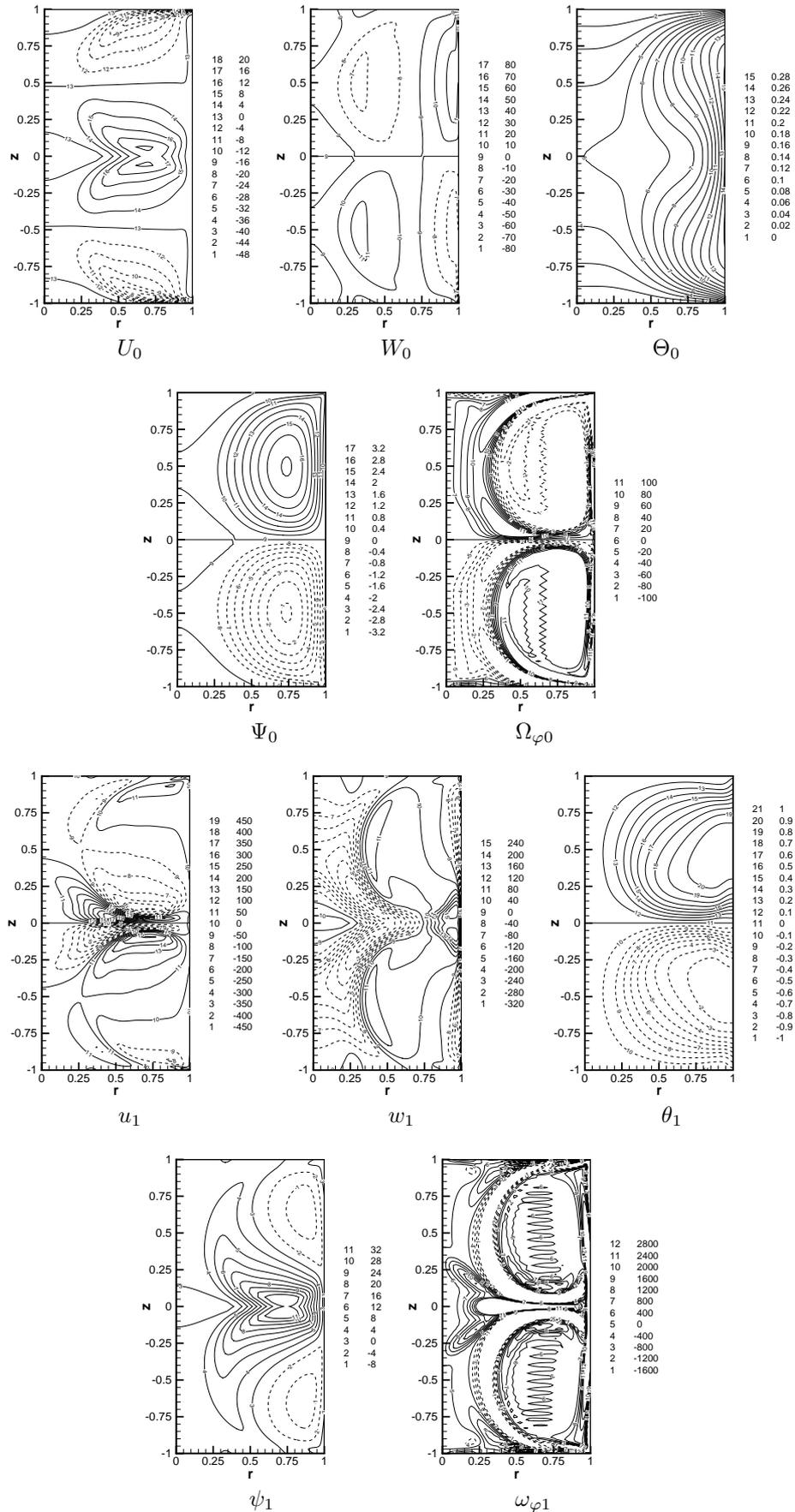


FIG. 3.31 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 , fonction de courant Ψ_0 et rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ du champ stationnaire U_0 et les composantes de vitesses radiale u_1 et axiale w_1 , température θ_1 , fonction de courant ψ_1 et rotationnel $\omega_{\varphi 1}$ de sa perturbation dominante de mode 0 u_1 pour $Pr = 0.02$, $Ma = 10000$ et $N = 81 \times 101$

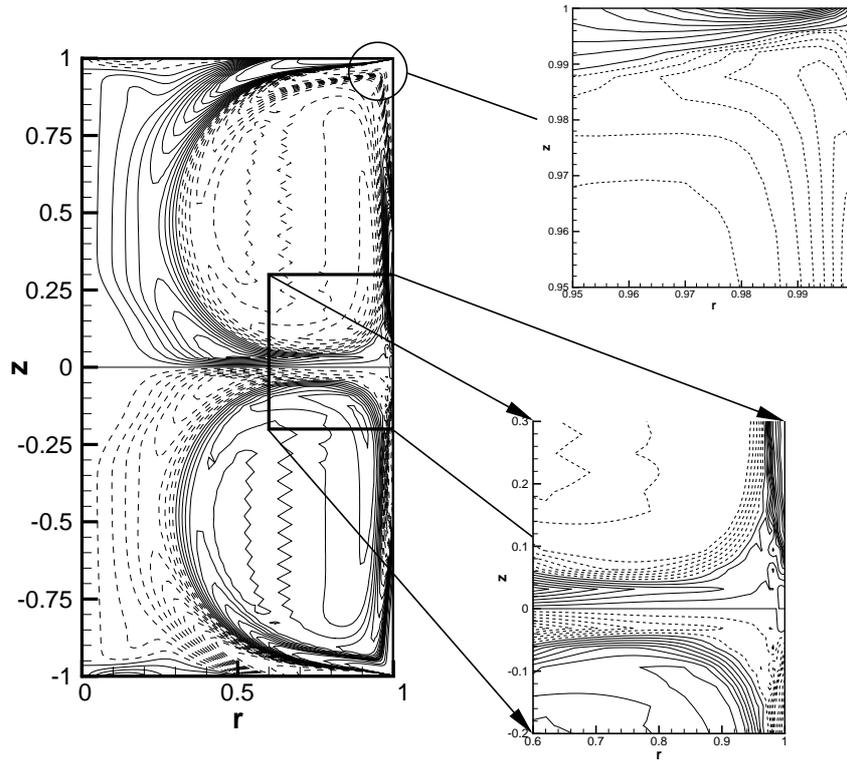


FIG. 3.32 – Détails du champ de vorticité de l'écoulement stationnaire à $Pr = 0.02$ et $Ma = 10000$

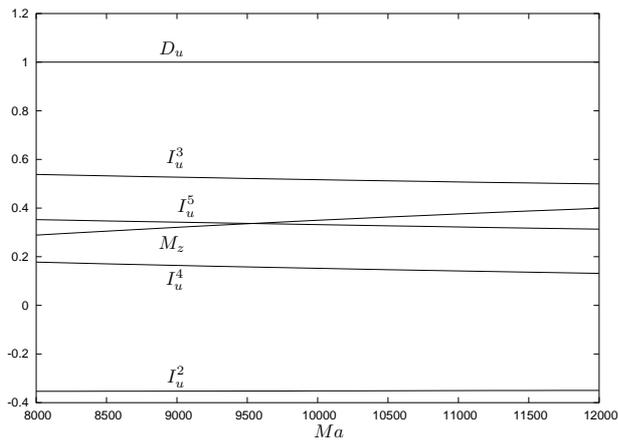


FIG. 3.33 – Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.02$, $k = 0$

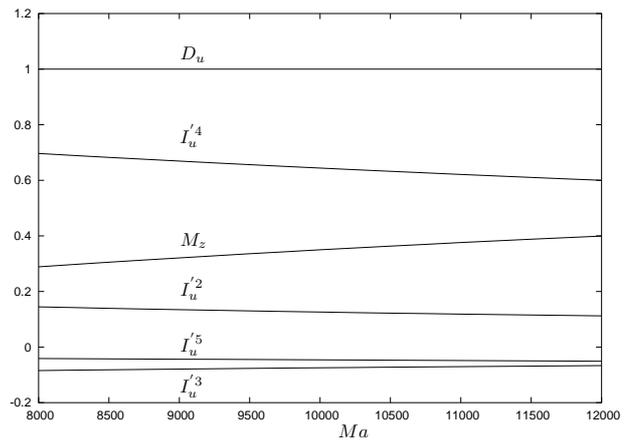


FIG. 3.34 – Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.02$, $k = 0$

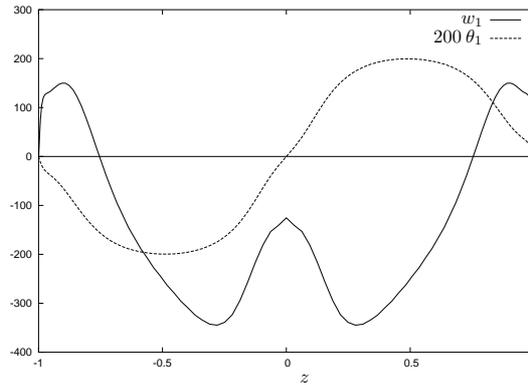


FIG. 3.35 – Vitesse axiale et température de la perturbation à la surface libre à $Pr = 0.02$ et $Ma = 10000$

3.2.2.5 Prandtl=0.06, transition par bifurcation de Hopf

À $Pr = 0.06$ l'écoulement devient instable à $Ma_c = 265903$ via une bifurcation de Hopf de pulsation $\omega_c = 172.9$. Les composantes de vitesse radiale et axiale, la température, la fonction de courant et la vorticité du champ stationnaire instable à $Ma = 270000$ sont présentées sur la figure 3.36. La fonction de courant et la température du mode propre dominant instationnaire sont présentées, en représentation module/phase, sur la figure 3.37.

Le champ stationnaire \mathcal{U}_0 montre une modification importante de ses isothermes par rapport au champ stationnaire à $Pr = 0.02$ et $Ma = 10000$ en 3.2.2.4. Les forces thermocapillaires sont en effet plus intenses, ce qui augmente les vitesses axiale et radiale du fluide, déformant ainsi les isothermes par rapport au cas purement diffusif. L'écoulement stationnaire est toujours constitué de deux cellules contrarotatives, symétriques par rapport au plan médian avec quatre cellules de recirculation (*c.f.* figure 3.42) se trouvant proches de l'axe du cylindre, du côté des fronts solides et de part et d'autre du plan médian. Comme dans les précédents écoulements vus à faible nombre de Prandtl, les maxima de la vitesse radiale sont proches des front solides et du point triple et également de part et d'autre du plan médian en $r \simeq 0.5$; les maxima de la vitesse axiale sont sur la surface libre. Le champ de température présente deux maxima sur la surface libre en $z = \pm 0.5$. La vorticité n'est pas sous résolue contrairement à la représentation du champ stationnaire à $Pr = 0.02$ et $Ma = 10000$ à la section 3.2.2.4, ce qui suggère que la résolution numérique utilisée ici est meilleure.

Les maxima du module de la fonction de courant du mode propre dominant sont à $r \simeq 0.75$, de part et d'autre du plan médian, et se situent dans la même zone que les perturbations stationnaires rencontrées jusqu'ici. Le module de la fonction de courant présente quatre zéros, entourés d'un cercle sur la figure : en $z = \pm 0.5$ et $r = 0.3$ et $r = 0.5$. Aucun de ces minima ne se trouve au centre des cellules. Le module de la composante de température présente aussi quatre minima dont deux, par contre, se trouvent au centre des cellules du champ stationnaire. Les deux autres sont proches des fronts solides en $r = 0.25$. Les maxima θ_1 se trouvent de part et d'autre du plan médian, proches de celui-ci en $r \simeq 0.7$. Contrairement aux modes propres vus jusqu'à présent, les maxima de $|\theta_1|$ ne se trouvent plus sur la surface libre. Les maxima des modules de ψ_1 et θ_1 sont spatialement proches.

La densité des lignes de la fonction de courant du mode propre dominant montre que les maxima de la vitesse radiale se trouvent en $r \simeq 0.5$ et $r \simeq 0.8$ de part et d'autre du plan médian. le maximum de la vitesse axiale se trouve sur le plan médian très proche de la surface libre.

De tous les termes contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique, sur les figures 3.38, celui qui est dominant est M_z qui caractérise le travail des forces thermocapillaires sur la surface libre. Il y a donc un couplage fort entre la dynamique et la thermique qui indique que la température est le facteur déstabilisant de l'écoulement stationnaire. Ce sont alors les termes contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique, sur les figures 3.39 et 3.40 qui peuvent donner une idée sur le mécanisme de déstabilisation de l'écoulement. L'erreur relative, δ_{ϵ_c} et δ_{ϵ_θ} , commise sur les taux de croissance est inférieure à $10^{-3}\%$. Les termes dominants dans ce cas sont $\langle I_\theta^1 \rangle = -\int \theta u \partial_r \Theta_0$ et $\langle I_\theta'^1 \rangle = -\int \theta \left(\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla} \right) \Theta_0$. De ces deux termes, c'est le second qui approche le plus la distribution

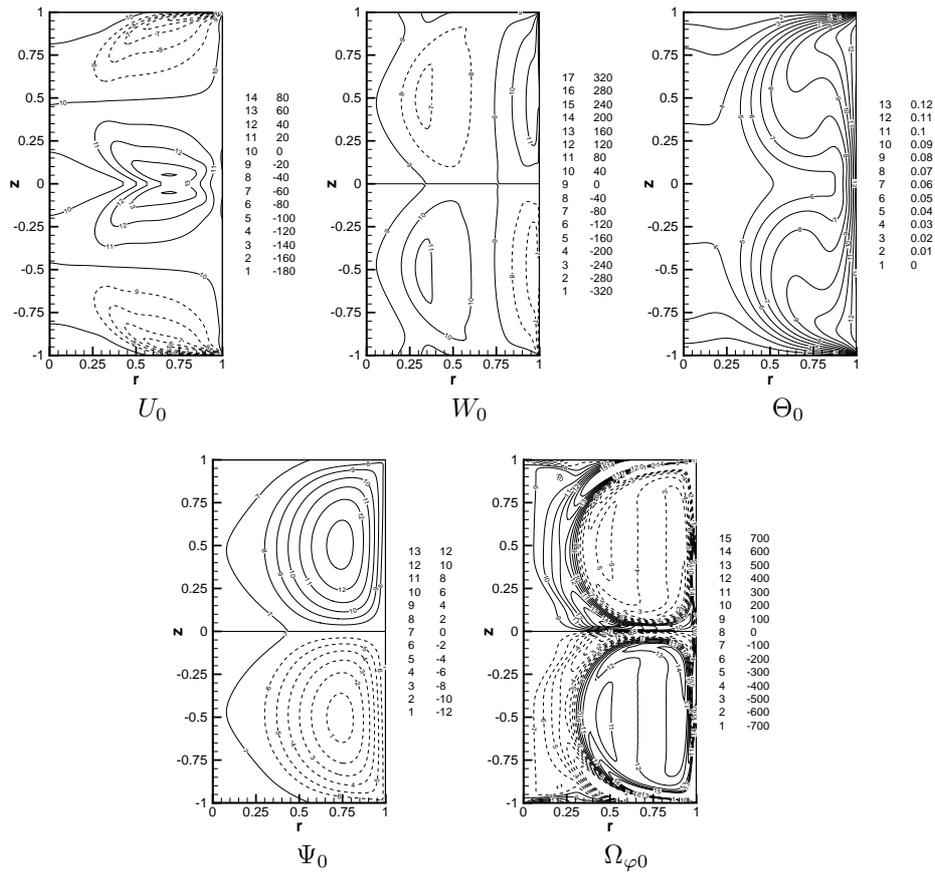


FIG. 3.36 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 , fonction de courant Ψ_0 et rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ du champ stationnaire \mathcal{U}_0 pour $Pr = 0.06$, $Ma = 270000$ et $N = 100 \times 150$

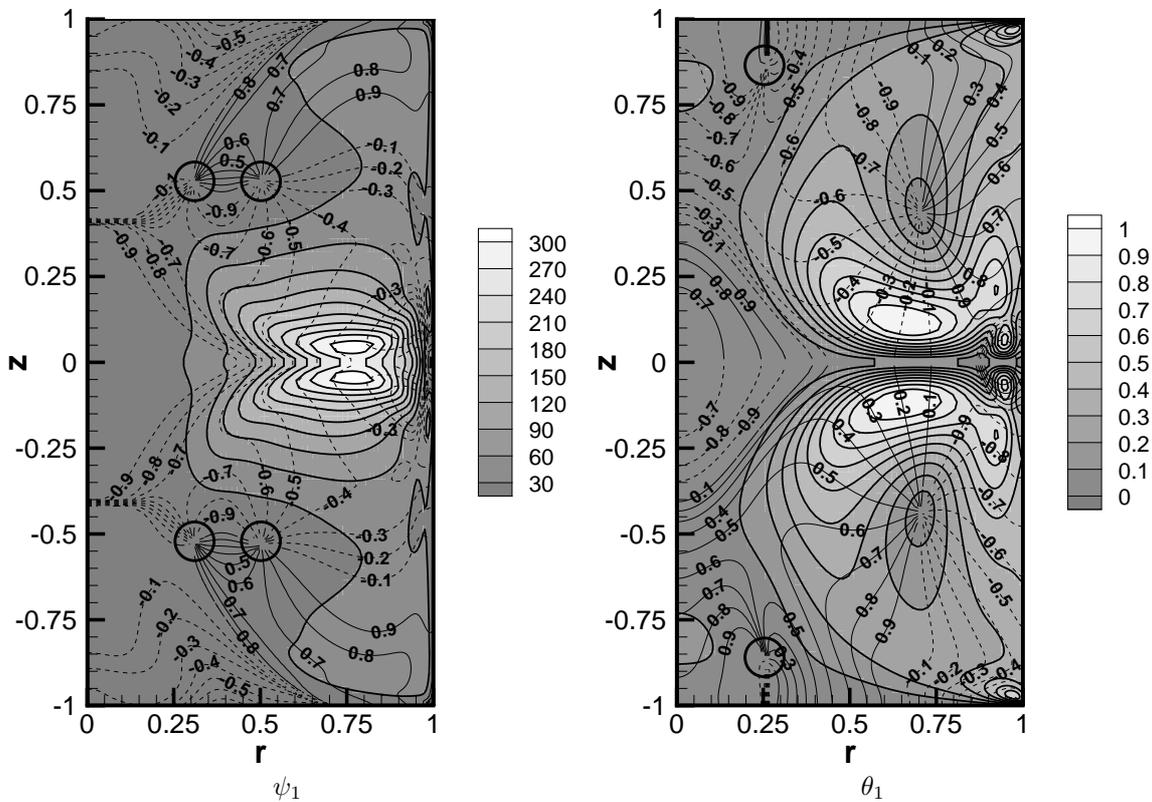


FIG. 3.37 – Fonction de courant et température de la perturbation dominante de mode 0 à $Pr = 0.06$ et $Ma = 270000$

spatiale de $\langle \dot{e}_\theta \rangle$ sur la figure 3.41. De plus, $\langle I_\theta'^1 \rangle$ est croissant alors que $\langle I_\theta'^2 \rangle = -\int \theta (\vec{u}_\parallel \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0$ est décroissant sans pouvoir compenser la croissance du premier terme. C'est donc $\langle I_\theta'^1 \rangle$ qui représente le mécanisme déstabilisant.

Dans le cas de la décomposition naturelle, le terme $\langle I_\theta^1 \rangle$ est constant alors que l'autre terme, $\langle I_\theta^2 \rangle = -\int \theta w \partial_z \Theta_0$, qui est le transfert axial de la température de l'écoulement stationnaire vers la composante en température de la perturbation, croît et rend l'écoulement instable. Il est tentant, avec ce second terme, de faire le parallèle avec le mécanisme déstabilisant que Smith et Davis [99] ont décrit à faibles nombres de Prandtl. Il s'agit du même mécanisme que celui décrit par le terme $\langle I_\theta^2 \rangle$. On peut légitimement se demander quel terme, celui qui possède la variation du taux de croissance la plus élevée ou la valeur la plus grande, représente le mécanisme de déstabilisation.

Même si le mécanisme de déstabilisation n'est pas celui observé à $Pr = 0.002$, on peut néanmoins souligner la présence de maxima du taux de croissance de l'énergie, cinétique dans un cas, thermique dans l'autre, proche de la surface libre de part et d'autre du plan médian.

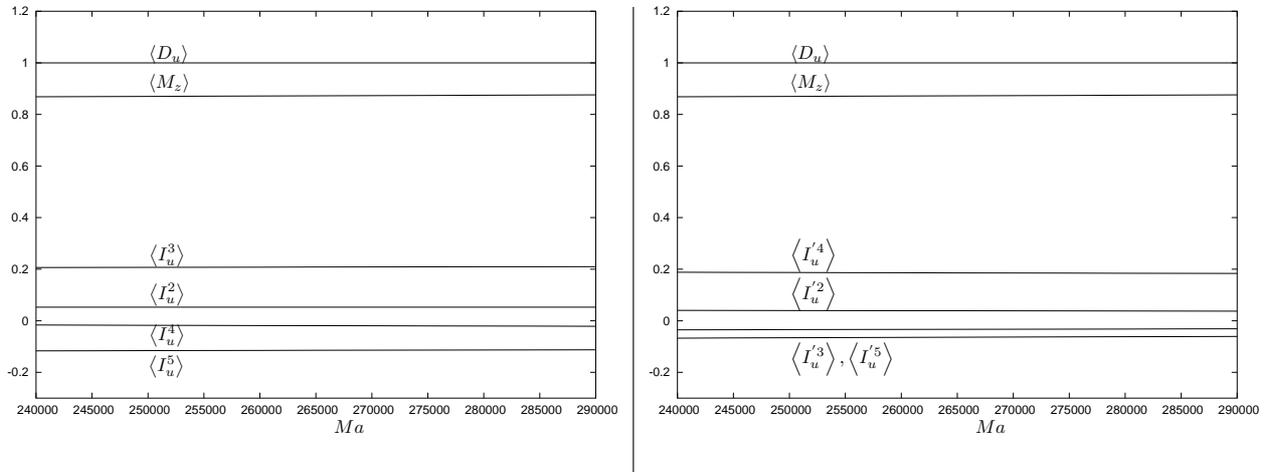


FIG. 3.38 – Termes naturels (en haut) et centrifuges (en bas) contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.06$, $k = 0$

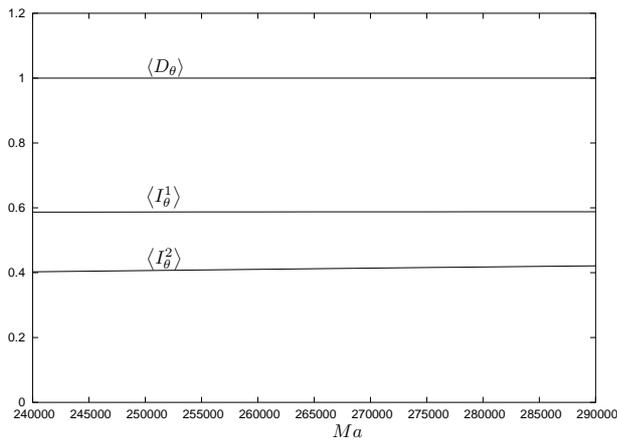


FIG. 3.39 – Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.06$

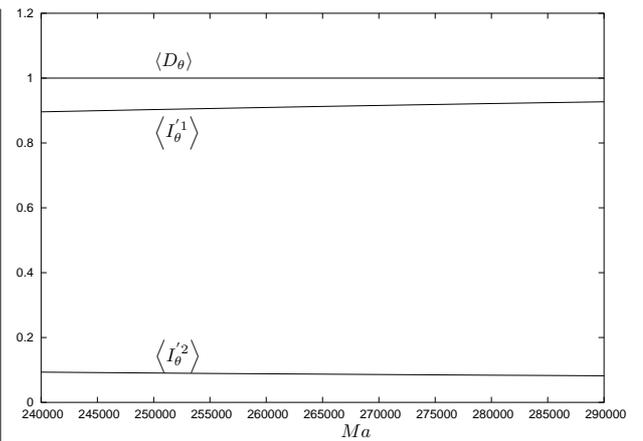


FIG. 3.40 – Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.06$

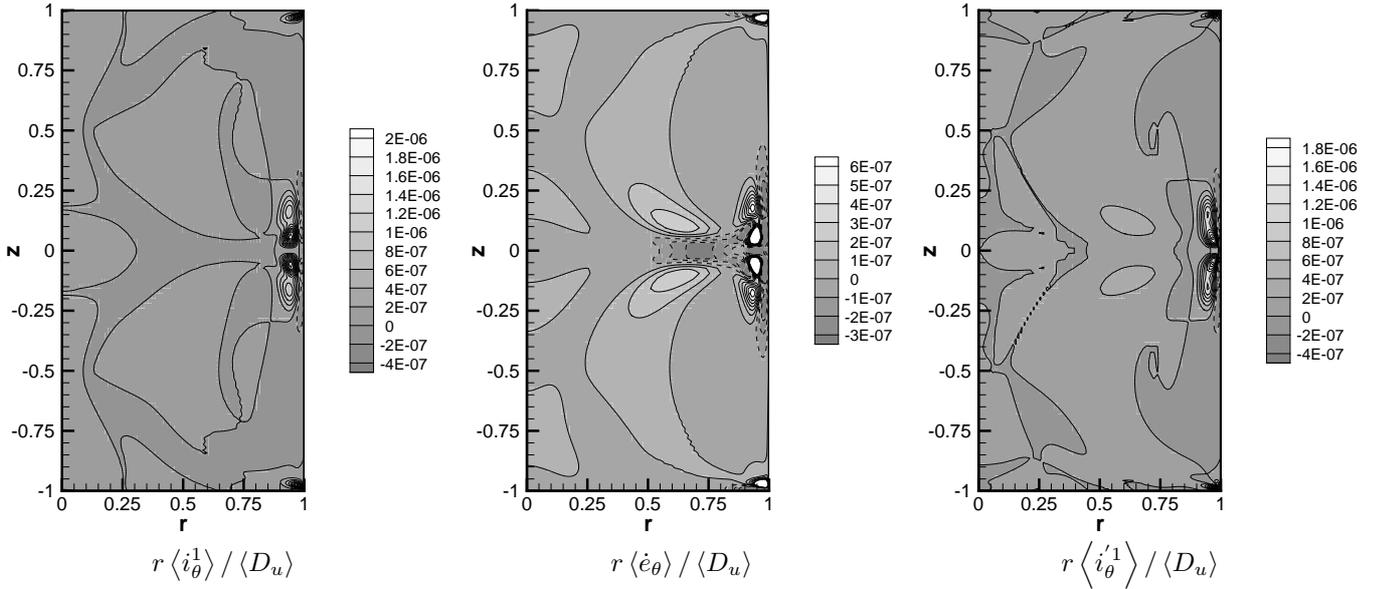


FIG. 3.41 – Distributions spatiales $\langle i_\theta^1 \rangle$, $\langle \dot{e}_\theta \rangle$ et $\langle i_\theta^1 \rangle$ multipliées par r et normalisées par D_u . $Pr = 0.06$, $Ma = 270000$, $k = 0$

3.2.2.6 Structure des écoulements oscillants à $Pr=0.06$

Afin d'observer l'influence de la perturbation oscillante sur l'écoulement, nous avons calculé le champ obtenu à $Ma = 280000$. Les figures 3.42, 3.43 et 3.44 représentent la fonction de courant, la température et le détail du rotationnel près du plan médian et de la surface libre. On observe que la pulsation de l'écoulement, qui vaut $\omega = 165.3$, est inférieure à la pulsation critique, tout comme la pulsation de l'écoulement $Pr = 0.002$ et $Ma = 140$ (section 3.2.2.2) qui est inférieure à la pulsation critique à $Pr = 0.002$.

Les lignes de courant oscillent globalement de la même manière que l'écoulement vu à $Pr = 0.02$ (*c.f.* section 3.2.2.2). Cette variation concerne essentiellement les cellules de recirculation, et moins à la surface libre. Le champ de température est déformé par la convection et oscille faiblement, ceci parce que l'écoulement des cellules principales n'oscille presque pas et donc ne modifie pas les isothermes. Les isothermes proches de l'axe s'approchent d'un écoulement pour lequel la température serait diffusive. La vitesse proche de l'axe est en effet relativement faible comparée à celle sur la surface libre.

La vorticité n'est plus de signe constant sur chaque demi-surface libre séparée par le plan médian. La vitesse radiale est nulle sur la surface libre, donc la vorticité sur la surface libre est égale à $-\partial_r W_0$. Or ceci est la condition aux limites gérée par la température : $\partial_r W_0 = -Ma \partial_z \Theta_0$. Le signe de la vorticité est directement lié à la variation axiale de la température. Le changement de signe de la vorticité observé ici est dû à une variation locale de température. Cette variation est provoquée par l'arrivée de fluide froid le long du plan médian qui refroidit localement le milieu de la surface libre et dédouble le maximum de température.

3.2.2.7 Prandtl=20, transition par bifurcation de Hopf

C'est par une bifurcation de Hopf, dont le seuil est $Ma_c = 62040$ et la pulsation critique $\omega_c = 111.4$, que l'écoulement devient instable à $Pr = 20$. Les composantes de vitesse radiale et axiale, température, fonction de courant et vorticité de l'écoulement, à $Ma = 62100$, sont présentées sur la figure 3.45. L'écoulement est caractéristique de l'intervalle $Pr \in [20, 100]$. Les isothermes de l'écoulement stationnaire sont fortement déformées par rapport au cas purement diffusif : l'advection a pris le pas sur la diffusion de la chaleur. La température a son maximum au milieu de la surface libre et ne varie pas beaucoup sur celle-ci jusqu'à $z = \pm 0.75$. La vitesse radiale est maximale à proximité des points triples et présente un maximum local sur le plan médian ; la vitesse axiale est maximale sur la surface libre près des fronts solides et elle admet un fort gradient radial entre $r \simeq 0.75$ et la surface libre. La vorticité est diffusée, elle n'est pas convectée par l'écoulement. La fonction de courant ne présente pas

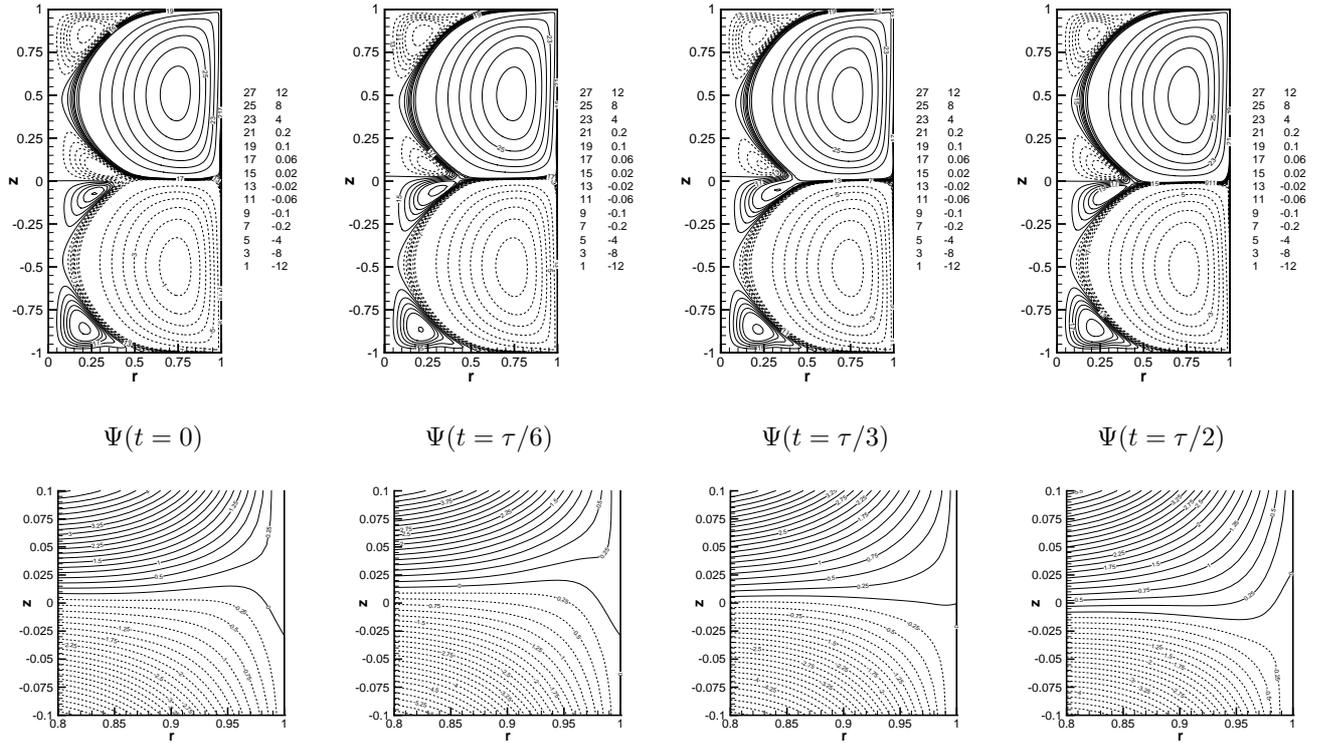


FIG. 3.42 – Fonction de courant sur une demi-période $\tau/2$ et son détail à $Pr = 0.06$, $Ma = 280000$

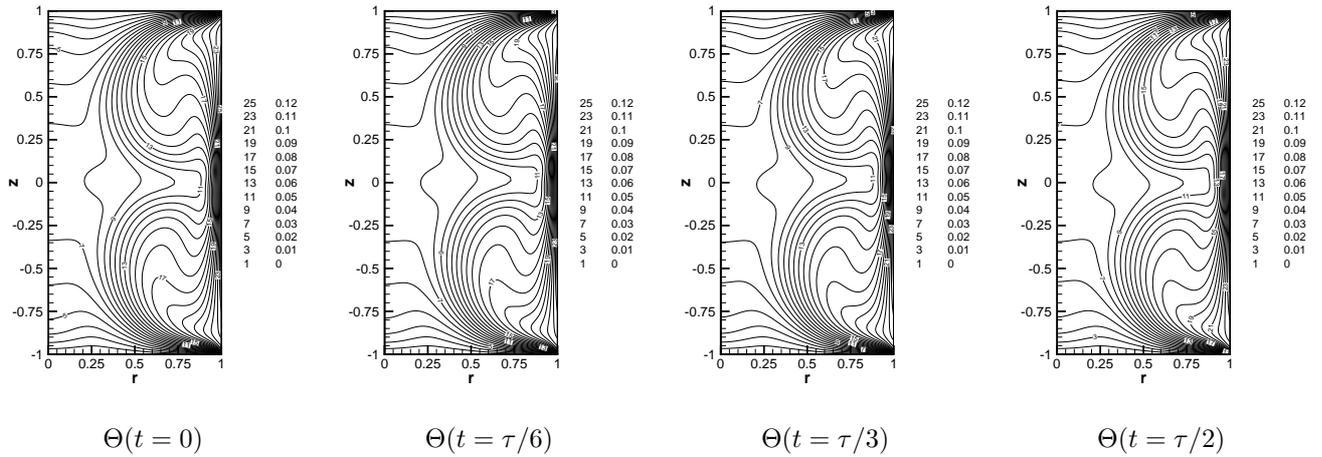


FIG. 3.43 – Température sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 0.06$, $Ma = 280000$

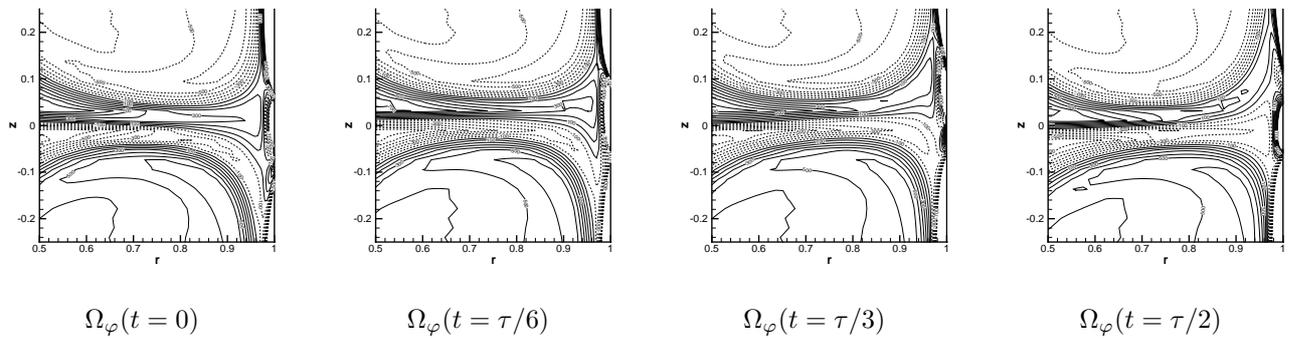


FIG. 3.44 – Vorticité sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 0.06$, $Ma = 280000$

de cellule de recirculation.

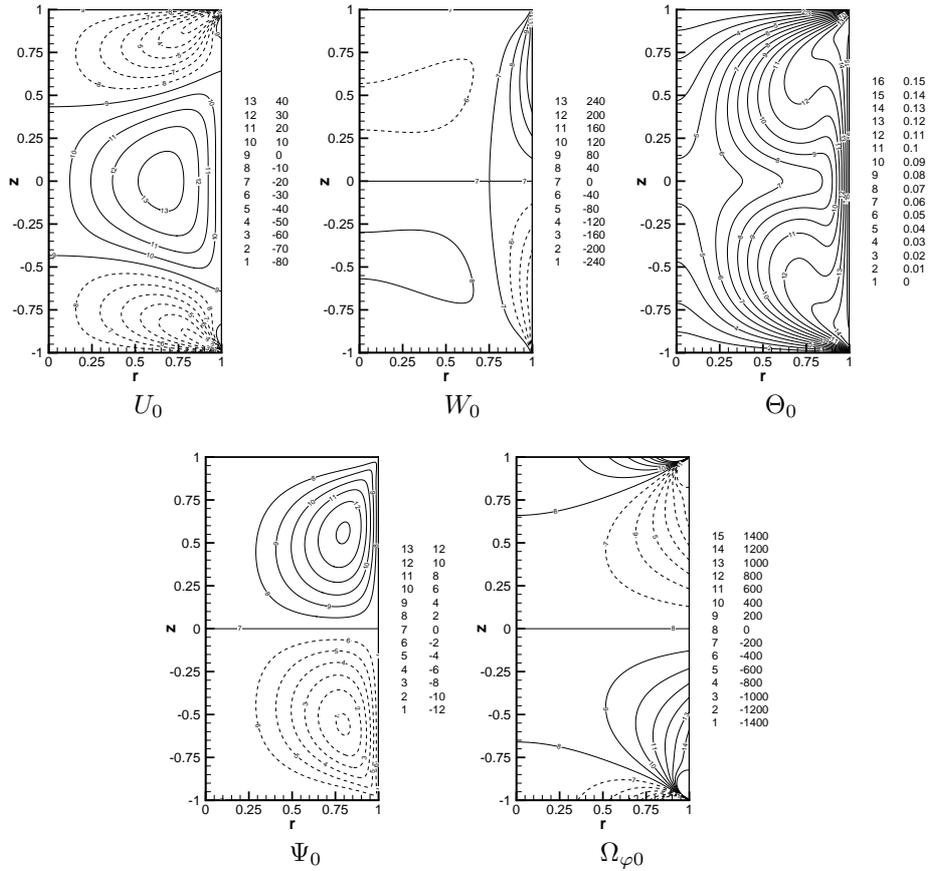


FIG. 3.45 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 , fonction de courant Ψ_0 et rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ du champ stationnaire \mathcal{U}_0 pour $Pr = 20$, $Ma = 62100$ et $N = 130 \times 200$

Le mode propre dominant de l'écoulement à $Pr = 20$ et $Ma = 62100$ est représenté en module/phase de sa fonction de courant et de sa température sur la figure 3.46. Le module de la fonction de courant est constitué d'une seule cellule dont le maximum est sur le plan médian. D'après la densité des lignes de courant, le maximum de vitesse radiale se situe au milieu de chaque demi cavité et le maximum de vitesse axiale au milieu de la surface libre. Les maxima du module température de la perturbation se situent de part et d'autre du plan médian, en $r \simeq 0.6$. Il n'y a pas de point fixe dans la cavité pour la fonction de courant et la température.

L'évolution des différents termes contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique de la perturbation n'est pas représentée car le terme dominant autre que la dissipation D_u est M_z , qui caractérise le couplage entre la dynamique et la thermique. La température est donc le facteur provoquant la déstabilisation de l'écoulement stationnaire. La perturbation est alors hydrothermale, ce qui est en accord avec le nombre de Prandtl de l'écoulement et l'invariance du seuil de l'instabilité avec le nombre de Prandtl.

D'après la décomposition naturelle et centrifuge, dont les intégrales pour l'énergie thermique sont respectivement représentées sur les figures 3.47 et 3.48, les termes dominants contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique sont $\langle I_\theta^2 \rangle = -\int \theta w \partial_z \Theta_0$ et $\langle I_\theta^1 \rangle = -\int \theta (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0$. Ces deux termes présentent tous deux le taux de variation le plus élevé pour chacune des décompositions naturelle et centrifuge. Néanmoins $\langle I_\theta^2 \rangle = -\int \theta w \partial_z \Theta_0$ et $\langle I_\theta^1 \rangle$ sont tous les deux du même ordre de grandeur et croissants, alors que $\langle I_\theta^1 \rangle$ est bien plus grand que $\langle I_\theta^2 \rangle = -\int \theta (\vec{u}_\parallel \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0$. Entre les deux distributions spatiales $\langle i_\theta^2 \rangle$ et $\langle i_\theta^1 \rangle$, c'est le second qui approche le plus $\langle \dot{\epsilon} \rangle$ comme on peut le

voir sur la figure 3.49 où sont représentés ces termes.

Le taux de croissance local de l'énergie thermique $\langle \dot{\theta} \rangle$ est minimal sur plan médian à mi chemin entre la surface libre et l'axe. De part et d'autre de ce minimum et du plan médian se trouvent les maxima où la perturbation est censée s'amplifier. Le mécanisme ressemble à celui vu à $Pr = 0.02$, à la différence que c'est la température qui est convectée et non pas la vorticité.

Ces résultats peuvent être rapprochés de ceux de Smith et Davis [99] qui ont étudié la stabilité du pont liquide à tout nombre de Prandtl. Cependant le gradient de température sur la surface libre est dû à la différence de température entre les deux fronts solides et dans ce cas le mécanisme d'amplification de l'instabilité est lié au terme $\langle I_\theta^1 \rangle$. Or c'est $\langle I_\theta^2 \rangle$ qui est dominant et a le taux de variation le plus grand. Une hypothèse sur la non concordance entre le mécanisme prédit par Smith et Davis [99] et celui observé en zone-flottante est que dans notre cas, le gradient de température à la surface libre est dû à un flux de chaleur appliqué sur celle-ci.

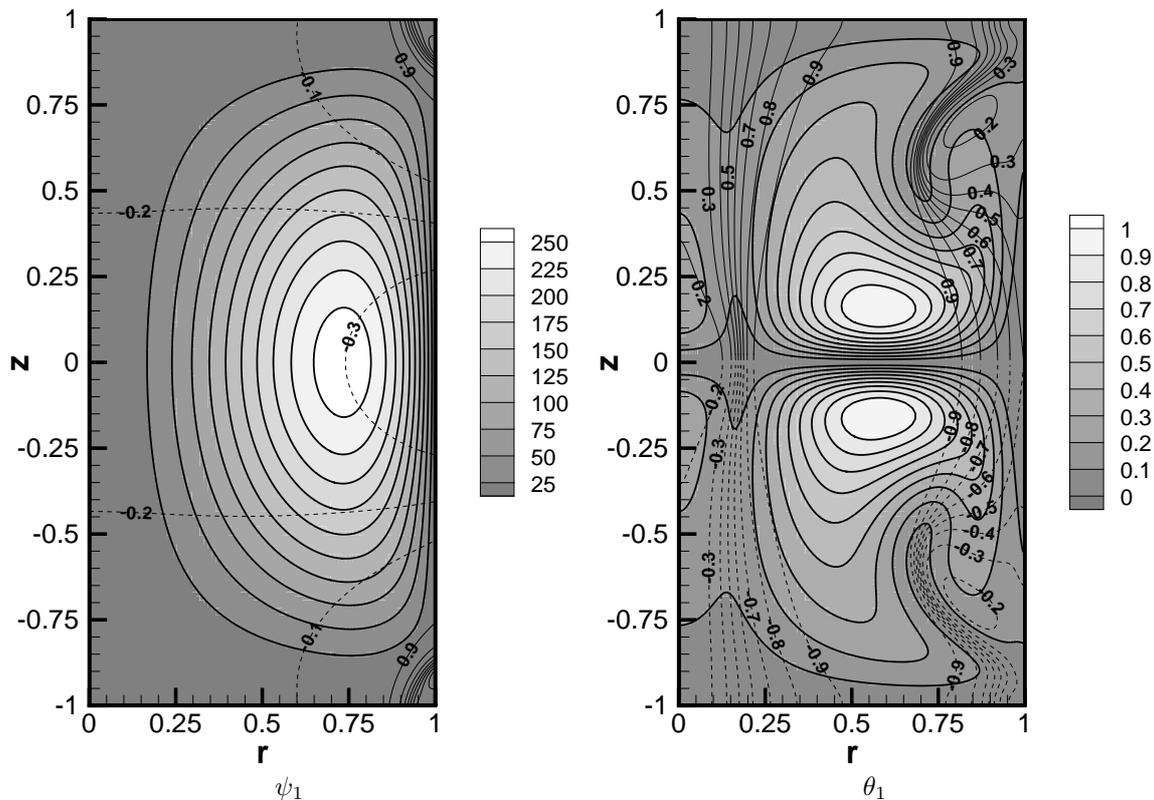


FIG. 3.46 – Fonction de courant et température de la perturbation dominante de mode 0 à $Pr = 20$ et $Ma = 62100$

3.2.2.8 Structure des écoulements oscillants à $Pr = 100$

L'écoulement présenté ici a été obtenu aux paramètres $Pr = 100$ et $Ma = 60000$, au delà du seuil qui se trouve à $Ma_c = 56614$ et dont la pulsation critique vaut $\omega_c = 124$. L'écoulement est instationnaire établi de pulsation $\omega = 125$ et de période notée $\tau = 0.05$. La fonction de courant Ψ , la température T et la vorticité Ω_φ sont respectivement représentées sur les figures 3.50, 3.51 et 3.52 aux instants $t = 0$, $t = \tau/6$, $t = \tau/3$ et $t = \tau/2$.

La fonction de courant et la température sont les composantes qui oscillent le plus. La ligne de séparation des deux cellules (il n'y a pas de recirculations) de la fonction de courant passe de part et d'autre du plan médian, ne faisant que comprimer l'une ou l'autre cellule. La température est déformée par la convection.

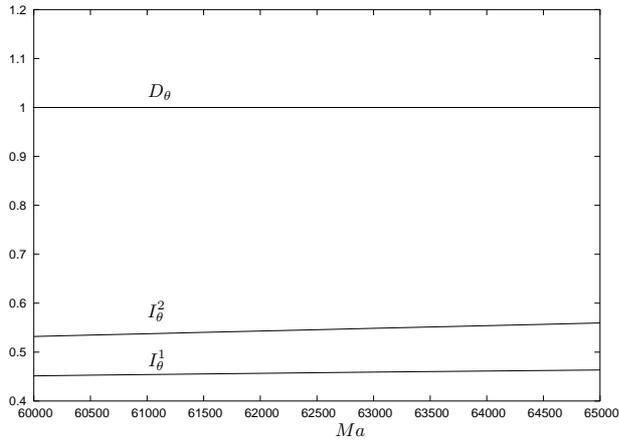


FIG. 3.47 – Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation D_{theta} . $Pr = 20$, $k = 0$

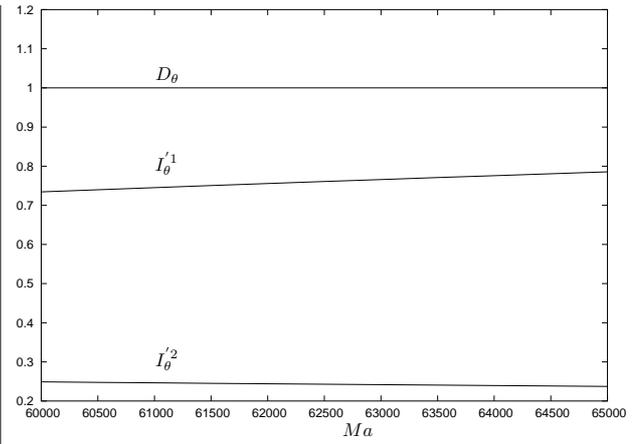


FIG. 3.48 – Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation D_θ . $Pr = 20$, $k = 0$

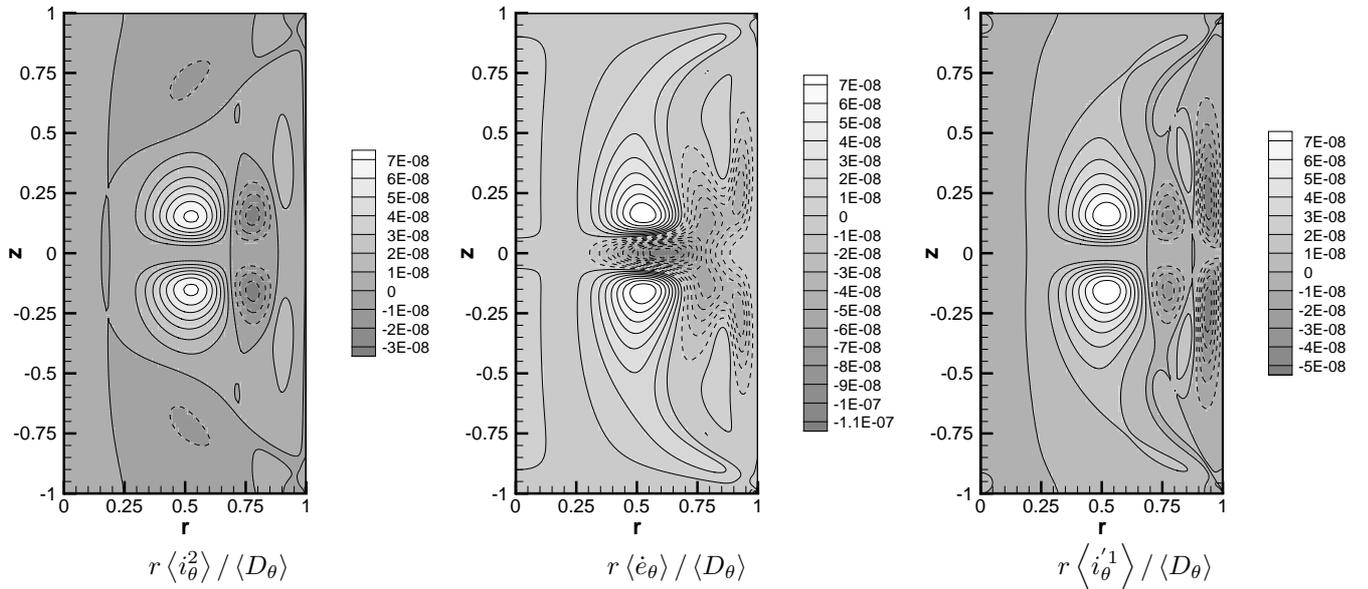


FIG. 3.49 – Distributions spatiales $\langle i_\theta^2 \rangle$, $\langle \dot{e}_\theta \rangle$ et $\langle i_\theta^1 \rangle$ multipliées par r et normalisées par D_θ . $Pr = 20$, $Ma = 62100$, $k = 0$

La vorticité, bien qu'oscillant un peu, est plus dominée par la diffusion. Le changement de signe de la vorticité sur la surface libre n'a plus lieu au plan médian. Ceci montre l'influence qu'a le fluide provenant de l'intérieur, le long du plan médian, sur la température à la surface libre.

3.2.2.9 Discussion

Nous avons constaté que, sur toute la plage de nombres de Prandtl explorée, la fonction de courant du mode dominant est toujours antisymétrique par rapport au plan médian, ce qui a pour conséquence une brisure de symétrie de l'état stationnaire symétrique par rapport au plan médian. Lorsque la bifurcation est stationnaire ($Pr \in [0.0035, 0.0315]$), cela conduit à des solutions multiples dont au moins deux sont antisymétriques l'une de l'autre et présentant deux cellules contrarotatives de tailles très différentes. Lorsque la bifurcation est de type Hopf, la brisure de symétrie se manifeste par la variation périodique de la taille des deux cellules contrarotatives. La structure du mode dominant est liée au type de bifurcation.

Lorsque l'écoulement stationnaire est déstabilisé via une bifurcation de Hopf, la pulsation des écoulements obtenus après la bifurcation est, pour les nombres de Prandtl inférieurs à 1, inférieure à la pulsation critique, et, pour les nombres de Prandtl supérieurs à 1, supérieure à la pulsation critique.

L'analyse en énergie confirme le comportement hydrodynamique et hydrothermal respectivement à bas nombre de Prandtl ($Pr < 1$) et à haut nombre de Prandtl ($Pr > 1$). Cependant, les mécanismes alimentant les instabilités en énergie ne peuvent être simplement expliqués par une seule décomposition du taux de croissance de l'énergie. Ainsi, à $Pr = 0.01$, les termes de la décomposition centrifuge qui représentent le mieux le taux de croissance de l'énergie cinétique ne sont pas ceux qui provoquent la déstabilisation de l'écoulement. Par contre, dans ce cas, la décomposition naturelle est plus cohérente car ce sont les termes qui ont le taux de variation le plus élevé qui représentent le mieux le taux de croissance de l'énergie cinétique.

Les deux bifurcations de Hopf qui ont été décrites à bas Pr ont en commun le même lieu des maxima du taux de croissance de l'énergie, cinétique pour l'une (*c.f.* figure 3.23), thermique pour l'autre (*c.f.* figure 3.41). Ces maxima se situent de part et d'autre du plan médian, proches de la surface libre.

Nous avons vu les modes propres dominants bidimensionnels de quelques écoulements bidimensionnels. Il se trouve que ce ne sont pas ces modes qui déstabilisent en premier l'écoulement, mais ce sont des modes 3D. Sur le diagramme de stabilité de la zone-flottante, figure 3.6, où ont été reportés les seuils des modes 0, 1 et 2, on peut voir que le plus déstabilisant à bas Pr est le mode 2 et que le plus déstabilisant à haut Pr est le mode 1. Les modes 3 et 4 ne semblent pas être les plus déstabilisants sur l'intervalle de nombres de Prandtl étudié. Nous nous sommes contentés de localiser les seuils les plus déstabilisants par nombre d'onde croissant, c'est pour cette raison que les seuils d'instabilité n'ont pas été reportés sur le diagramme de stabilité de la zone-flottante. Nous nous proposons d'étudier les modes pour quelques valeurs caractéristiques : à $Pr = 0.01$, $Pr = 0.06$ et $Pr = 0.2$ pour le mode 2 et $Pr = 20$ pour le mode 1.

3.2.3 Etude du mode 1

Les seuils d'instabilité de l'écoulement vis-à-vis du mode 1 sont reportés sur la figure 3.53 et les pulsations critiques associées sont sur la figure 3.54. Le mode 1 est, sur toute la plage de nombres de Prandtl étudiée, un mode oscillant. L'écoulement se déstabilise via une bifurcation Hopf et est le mode le plus instable pour les nombres de Prandtl supérieurs à 0.3. Le comportement global du seuil aux faibles et grands nombres de Prandtl est similaire au mode 0 : il y a une dépendance linéaire du seuil et de la pulsation en fonction du nombre de Prandtl aux faibles nombres de Prandtl ($Pr < 0.01$) et une indépendance aux grands nombres de Prandtl ($Pr > 40$).

Dépendance du seuil et de la pulsation critique en fonction du nombre de Prandtl.

La zone de transition autour de $Pr = 1$ n'adopte pas un comportement aussi simple qu'aux faibles et grands nombres de Prandtl. La meilleure approximation du seuil est la courbe d'équation $y = 2009 x^{1.051}$ avec un coefficient de corrélation de 0.99993. De même, la meilleure approximation

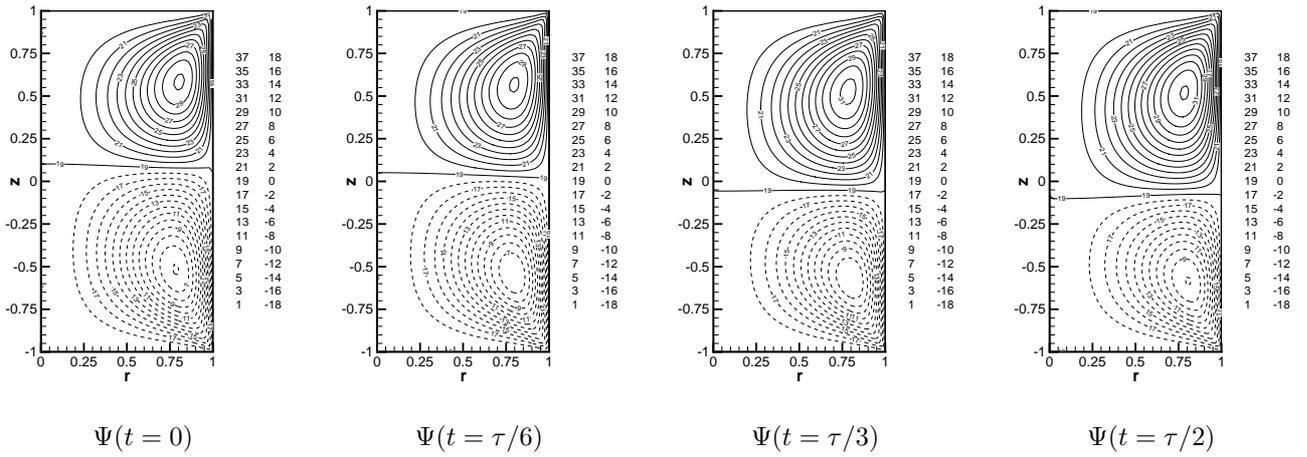


FIG. 3.50 – Fonction de courant sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 100$, $Ma = 60000$

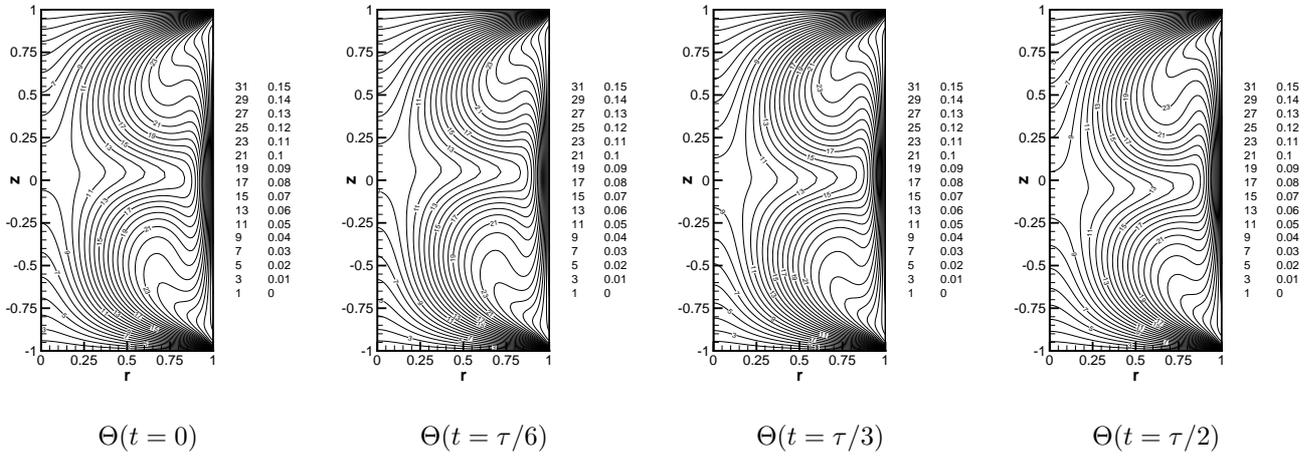


FIG. 3.51 – Température sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 100$, $Ma = 60000$

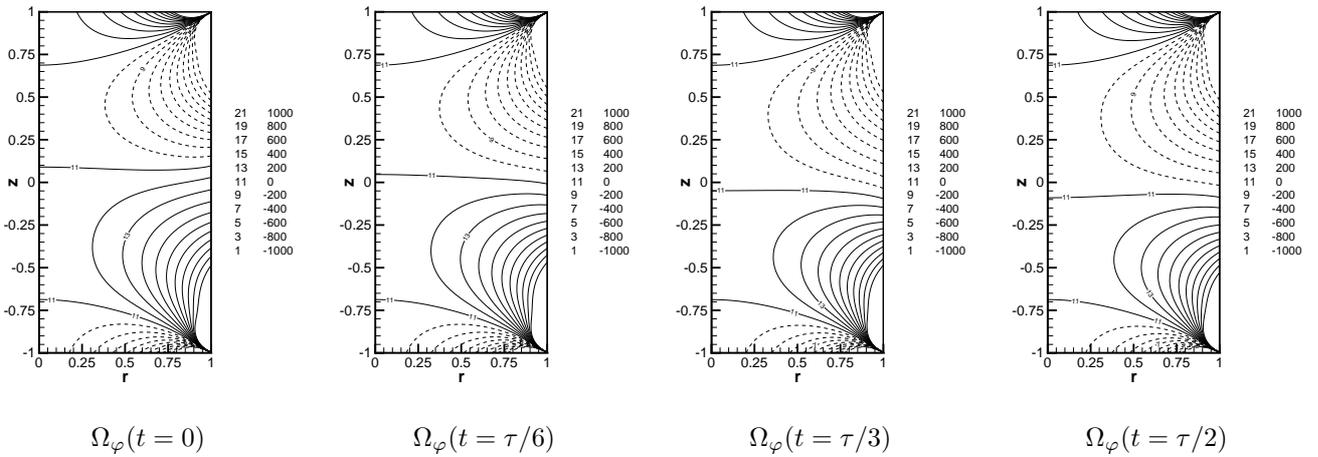


FIG. 3.52 – Vorticité sur une demi-période $\tau/2$ à $Pr = 100$, $Ma = 60000$

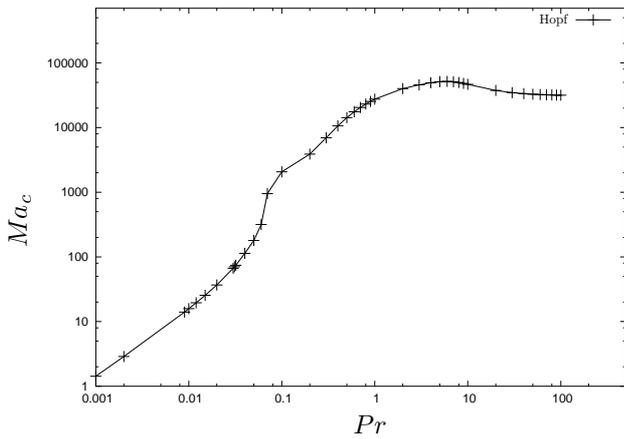


FIG. 3.53 – Seuil d’instabilité du mode 1 en fonction de Pr

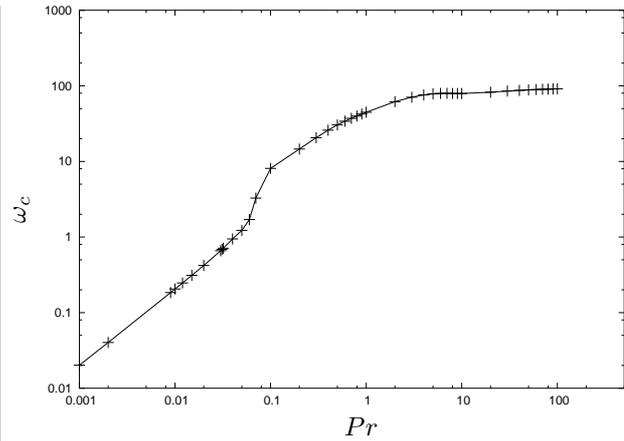


FIG. 3.54 – Pulsation critique de la bifurcation de Hopf pour le mode 1 en fonction de Pr

pour la pulsation critique est la courbe d’équation $y = 21.27 x^{1.007}$ avec un coefficient de corrélation de 0.999996. La valeur asymptotique du seuil aux grands nombres de Prandtl est approximativement 31500 et pour la pulsation critique cette valeur vaut approximativement 90.

L’instabilité est donc hydrodynamique à faibles nombres de Prandtl (inférieurs à 0.01), et hydrothermale pour de grands nombres de Prandtl (supérieurs à 40).

Cas $Pr = 20$, transition par bifurcation de Hopf

À $Pr = 20$ l’écoulement se déstabilise par le mode 1 à $Ma_c = 37468$ et possède une pulsation critique égale à 82.3. La figure 3.55 représente les composantes de l’écoulement stationnaire à $Ma = 37500$. Les composantes de la perturbation propre associée sont en représentation module/phase sur la figure 3.56.

L’écoulement stationnaire possède la même structure, avec des maxima plus faibles, que l’écoulement à $Pr = 20$ et $Ma = 62100$ décrit en section 3.2.2.7.

Les vitesses radiale u_1 et axiale w_1 et la température θ_1 de la perturbation sont représentées dans le plan $\varphi = 0$; la vitesse azimutale v_1 est représentée dans le plan $\varphi = \pi/2$. Les vitesses radiale u_1 et azimutale v_1 ne sont pas nulles sur l’axe car le mode 1 autorise la traversée de l’axe. Tous les modules des composantes de la perturbation sont symétriques par rapport au plan médian. Le module de la vitesse radiale est maximal sur l’axe en $z \simeq \pm 0.55$. Le module de la vitesse azimutale possède 4 maxima locaux dont deux se trouvent situés aux mêmes endroits que les maxima de la vitesse radiale. Les deux autres maxima sont sur la surface libre en $z \simeq \pm 0.6$. Les valeurs de u_1 et v_1 sont égales sur l’axe car la perturbation sur l’axe doit être la même dans n’importe quelle coupe axiale, en particulier dans les plans $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2$. Le module de la vitesse axiale w_1 de la perturbation est maximal au milieu de la surface libre, double des modules des autres composantes de vitesse, et nul de part et d’autre du plan médian en $r \simeq 0.5$ et $z \simeq \pm 0.55$. Les points où w_1 est nul ne coïncident pas avec les points fixes des deux tores de l’écoulement stationnaire. L’impact de la perturbation est important particulièrement sur et près de la surface libre, près du plan médian. La phase de w_1 est symétrique par rapport au plan médian alors que celles de u_1 , v_1 et θ_1 sont antisymétriques.

La structure de la perturbation sur la surface libre, sur une demi période, sur la figure 3.59, montre que la vitesse va des points chauds vers les points froids. C’est un mécanisme thermocapillaire classique. Cette figure et le module de la vitesse axiale w_1 dans un plan azimutal montrent que la symétrie est brisée au niveau du plan médian. Sur la figure 3.60 présentant les isothermes et les vitesses de la

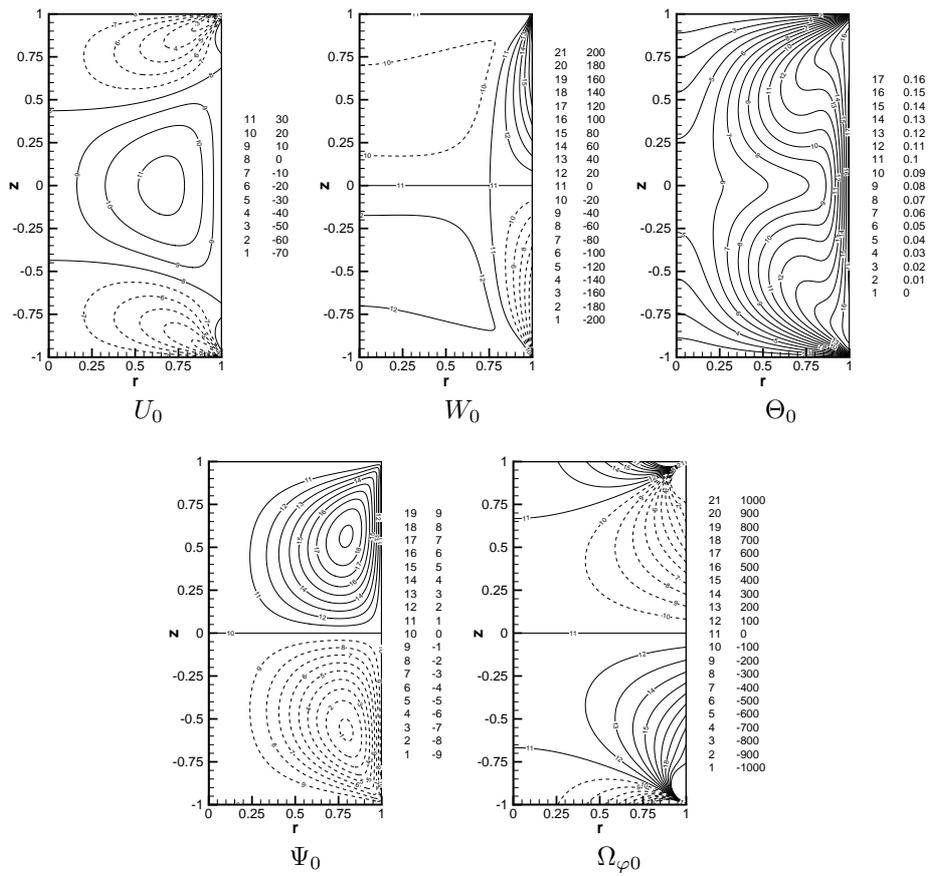
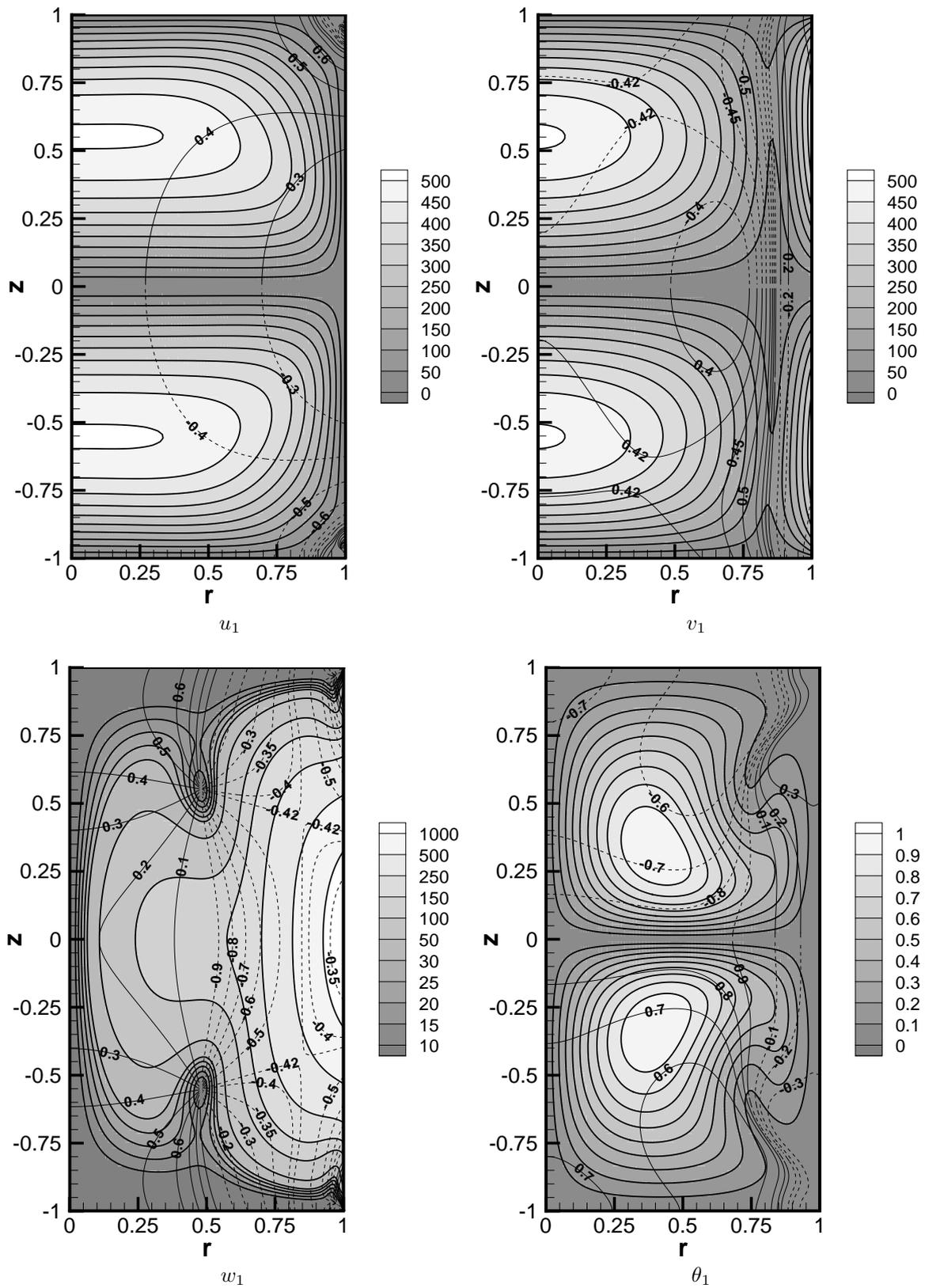


FIG. 3.55 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 , fonction de courant Ψ_0 et rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ du champ stationnaire \mathcal{U}_0 pour $Pr = 20$, $Ma = 37500$ et $N = 130 \times 200$

FIG. 3.56 – Composantes de la perturbation dominante de mode 1 à $Pr = 20$ et $Ma = 37500$

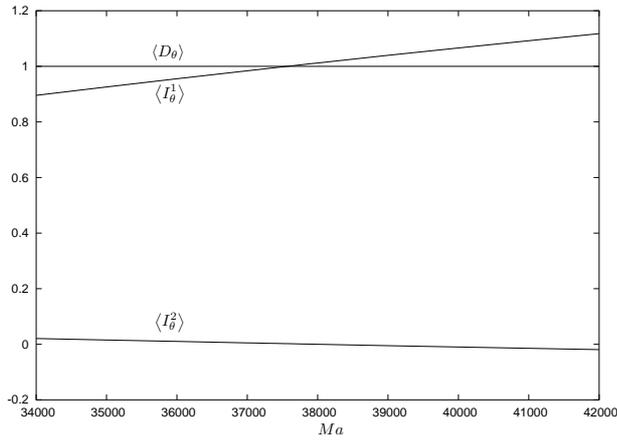


FIG. 3.57 – Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 20$, $k = 1$

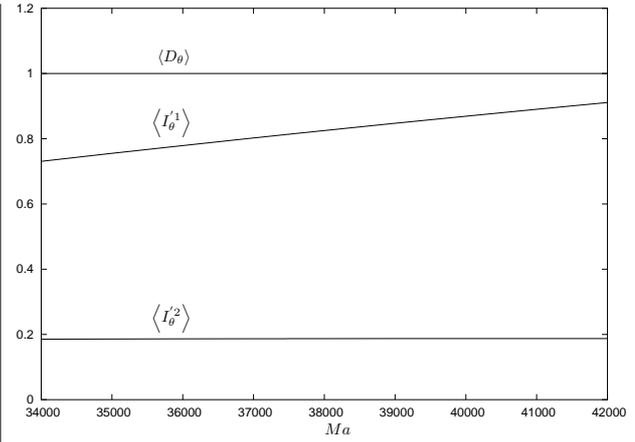


FIG. 3.58 – Termes centrifuges contribuant au taux de croissance de l'énergie thermique en fonction de Ma et normalisés par la dissipation D_θ . $Pr = 20$, $k = 1$

perturbation dans un plan axial en $z = 0.5$ sur une demi période, on observe que la perturbation qui entre au point froid de la surface libre en $\varphi = \pi$ traverse le cylindre pour ressortir au point chaud en $\varphi = 0$. A ce moment, la perturbation se dirige d'une part, comme on peut le voir sur la figure 3.61 montrant les isothermes et les vitesses de la perturbation dans le plan azimutal en $\varphi = 0$ sur une demi période, vers le point froid disposé symétriquement au point chaud par rapport au plan médian et, d'autre part, sur la figure 3.60, vers le point froid diamétralement opposé au point chaud.

L'analyse en énergie indique que le terme dominant pour l'énergie cinétique, en décomposition naturelle ou centrifuge, est M_z . Le couplage thermique/dynamique est dominant, la perturbation est de nature hydrothermale. La décomposition du taux de croissance de l'énergie thermique en composantes naturelles et centrifuges est respectivement représentée sur les figures 3.57 et 3.58. L'erreur relative, $\delta\dot{\epsilon}_c$ et $\delta\dot{\epsilon}_\theta$, commise sur les taux de croissance est inférieure à $10^{-3}\%$. Le terme dominant de l'énergie thermique est pour la décomposition naturelle $\langle I_\theta^1 \rangle = -\int \theta u \partial_r \Theta_0$ et $\langle I_\theta^1 \rangle = -\int \theta (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0$ pour la décomposition centrifuge. Bien que les distributions spatiales $\langle i_\theta^1 \rangle$ et $\langle i_\theta^1 \rangle$, toutes deux représentées sur la figure 3.62, s'approchent toutes les deux structurellement de la distribution du taux de croissance local de l'énergie thermique $\langle \dot{\epsilon}_\theta \rangle$, également représentée sur la figure 3.62, il semblerait que celui qui s'en approche le plus soit $\langle i_\theta^1 \rangle$. Son intégrale domine celle de $\langle i_\theta^1 \rangle$ et il intersecte la courbe de dissipation $\langle D_\theta \rangle$ au seuil d'instabilité de l'écoulement.

Le mécanisme d'instabilité observée est celui décrit par Smith et Davis [99] pour les grands nombres de Prandtl. Le transfert d'énergie se fait bien de la distribution radiale de température à la perturbation via la convection radiale : c'est $\langle I_\theta^1 \rangle$.

3.2.4 Etude du mode 2

Après avoir cherché le seuil d'instabilité du champ axisymétrique vis-à-vis du mode 1, nous avons testé la stabilité, vis-à-vis du mode 2, des écoulements axisymétriques, stables par le mode 1. Nous constatons, d'après la figure 3.6, qu'aux faibles nombres de Prandtl, inférieurs à 0.3, que le mode 2 est le plus déstabilisant. Aux grands nombres de Prandtl, le seuil du mode 2 est supérieur à celui du mode 1, donc il semblerait que ce soit le mode 1 qui reste le plus déstabilisant. Le seuil suit, aux faibles nombres de Prandtl, le même comportement linéaire que les seuils du mode 0 et du mode 1.

Le seuil d'instabilité et la pulsation critique du mode 2 en fonction du nombre de Prandtl sont reportés respectivement sur les figures 3.63 et 3.64. Sur le domaine où le mode 2 est dominant, la bifur-

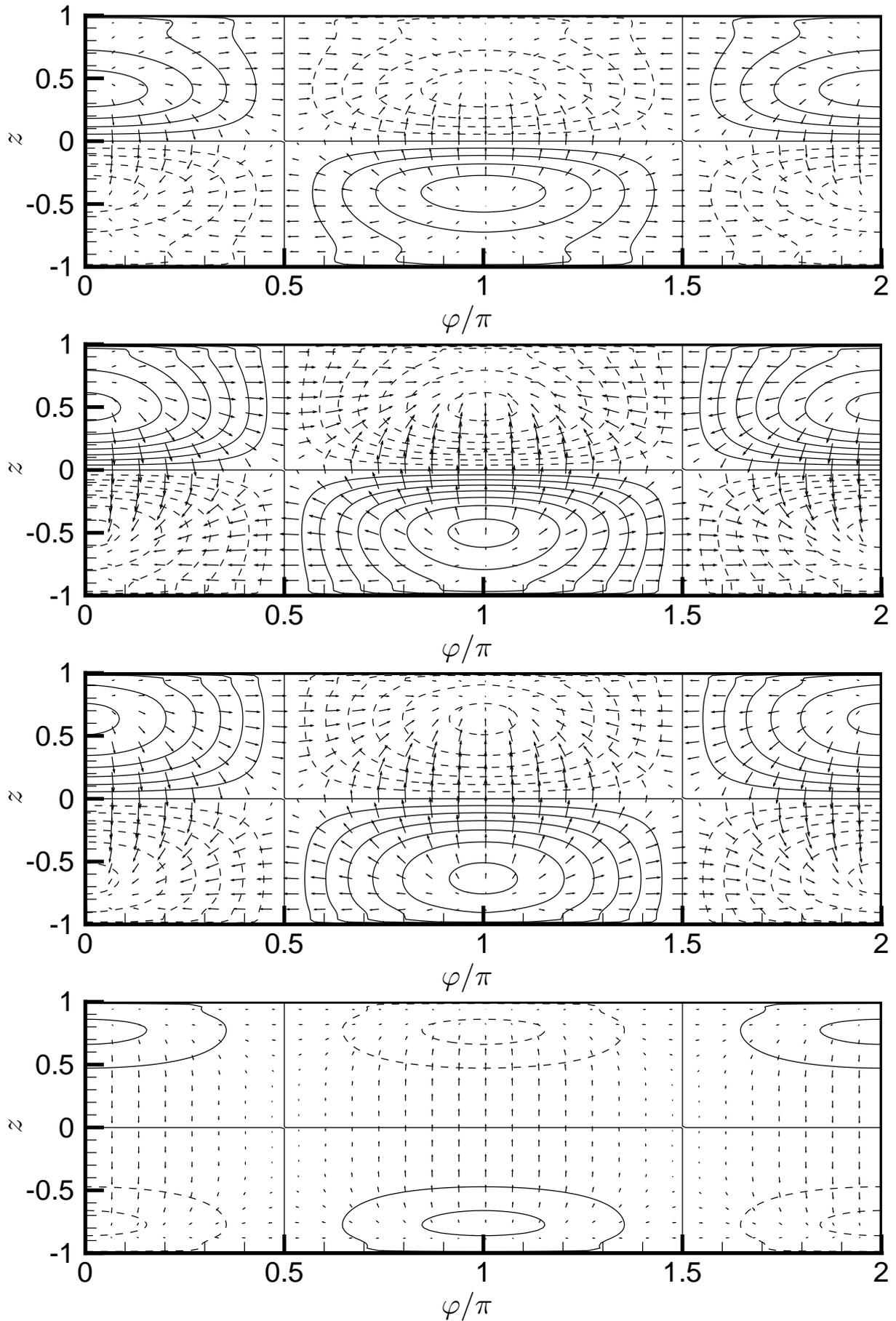


FIG. 3.59 – Structure de la perturbation de mode $k = 1$ de période τ à $Pr = 20$ et $Ma = 37500$ sur la surface libre aux instants $0, \tau/8, 2\tau/8$ et $3\tau/8$ sans le terme de croissance exponentielle

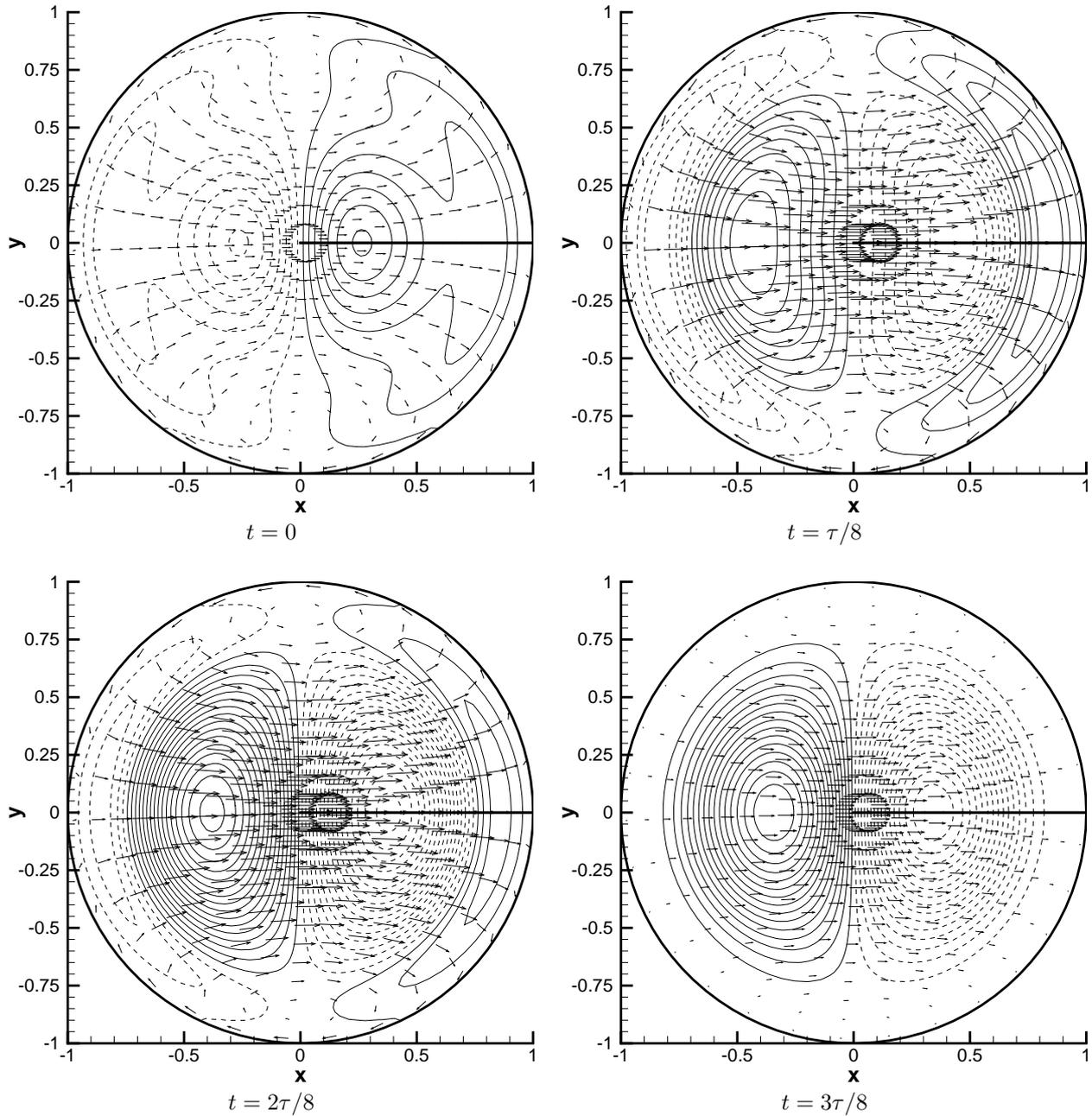


FIG. 3.60 – Coupe à la hauteur $z = 0.5$ de la perturbation de mode $k = 1$ de période τ à $Pr = 20$ et $Ma = 37500$ aux instants $0, \tau/8, 2\tau/8$ et $3\tau/8$ sans le terme de croissance exponentielle. Le rayon marque l'angle $\varphi = 0$.

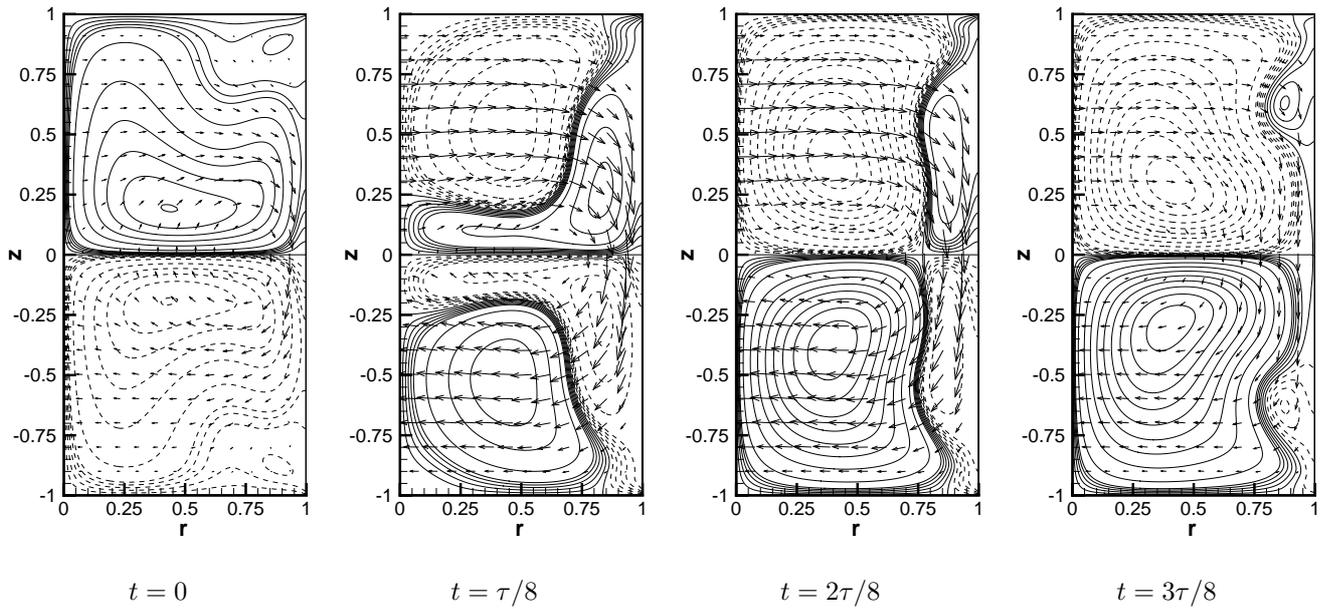


FIG. 3.61 – Coupe axiale en $\varphi = 0$ de la perturbation de mode $k = 1$ de période τ à $Pr = 20$ et $Ma = 37500$ aux instants $0, \tau/8, 2\tau/8$ et $3\tau/8$ sans le terme de croissance exponentielle. Les isothermes ne sont pas équidistant.

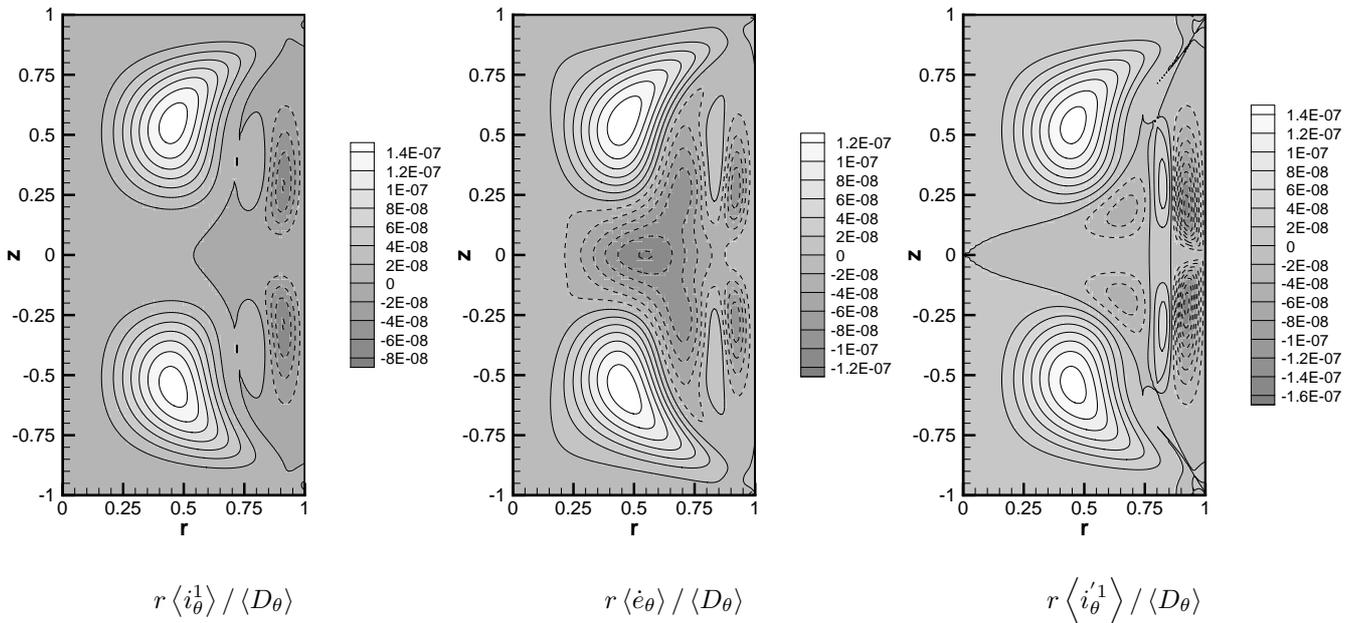


FIG. 3.62 – Distributions spatiales $\langle i_\theta^1 \rangle$, $\langle \dot{e}_\theta \rangle$ et $\langle i_\theta'^1 \rangle$ multipliées par r et normalisées par D_θ . $Pr = 20$, $Ma = 37500$, $k = 1$

cation de ce mode ne change pas de nature et est une bifurcation fourche, tout comme la bifurcation de mode 1 ne change pas de nature en étant une bifurcation de Hopf là où elle est dominante. Cependant, cette bifurcation fourche de mode 2 est due à deux modes de symétries différentes par rapport au plan médian. Ce mode déstabilisant est dit antisymétrique pour $Pr \in [0.001, 0.047[\cup]0.085, 0.4]$ et symétrique pour $Pr \in [0.047, 0.085]$ comme le montre le détail du diagramme de stabilité 3.65. Cette définition de la symétrie se base sur la symétrie par rapport au plan médian de la composante de température de la perturbation. L'écoulement stationnaire a une composante de température symétrique par rapport au plan médian. Une perturbation symétrique superposée à l'écoulement stationnaire, dans un régime linéaire, préserve la symétrie de la composante de température par rapport au plan médian. La température sur la surface libre étant le moteur de l'écoulement, si celle-ci est symétrique par rapport au plan médian alors l'écoulement est symétrique par rapport au plan médian. Si la composante de température de la perturbation n'est pas symétrique par rapport au plan médian, alors l'écoulement perturbé par cette perturbation aura perdu sa symétrie par rapport au plan médian.

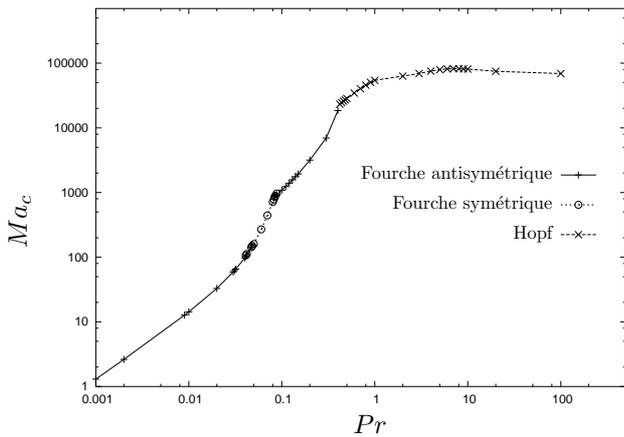


FIG. 3.63 – Seuil d'instabilité du mode 2 en fonction de Pr

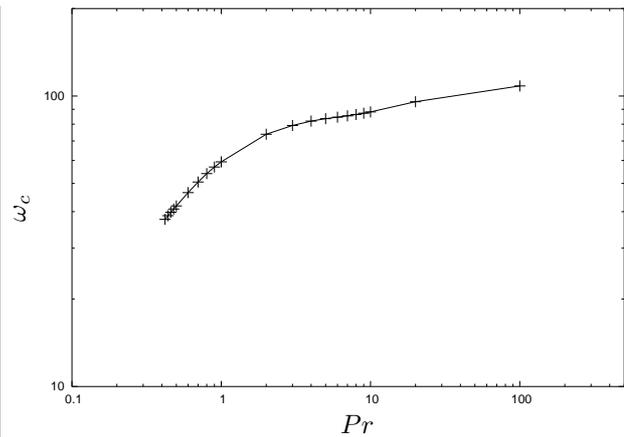


FIG. 3.64 – Pulsation critique de la bifurcation de Hopf pour le mode 2 en fonction de Pr

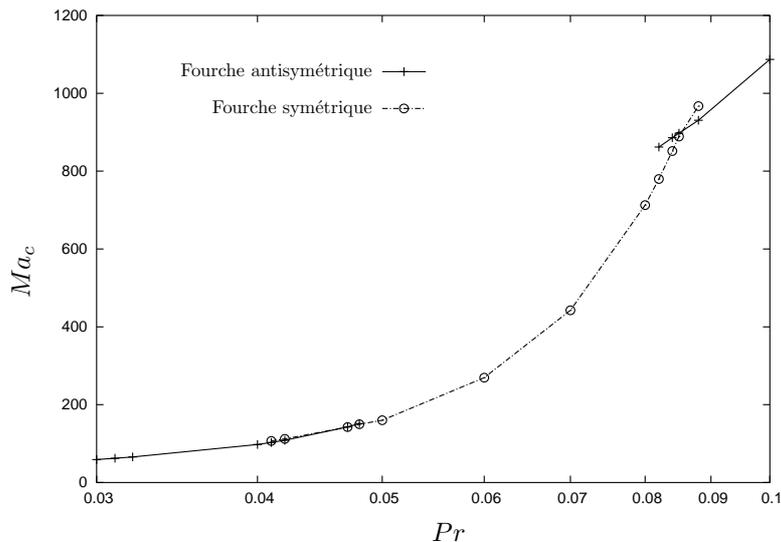


FIG. 3.65 – Seuil d'instabilité du mode 2 en fonction de Pr

Houchens et Walker [43] ont observé le même comportement de changement de symétrie de ce mode déstabilisant pour un flux de chaleur de la forme $(1 - z^2)$ alors que dans notre configuration

le flux a pour forme $(1 - z^2)^2$. L'intervalle $[0.041, 0.079]$ du nombre de Prandtl sur lequel ces auteurs ont observé le mode symétrique est une translation de l'intervalle $[0.047, 0.085]$ sur lequel nos observations ont été faites. La diminution du flux de chaleur total semble décaler l'apparition de ce mode symétrique vers les grands nombres de Prandtl.

Dépendance du seuil et de la pulsation critique en fonction du nombre de Prandtl.

Pour de faibles nombres de Prandtl, le seuil de transition de la bifurcation fourche dépend linéairement du nombre de Prandtl. Nous obtenons comme meilleure approximation du seuil la courbe d'équation $y = 1737 x^{1.04}$ avec un coefficient de corrélation de 0.99997. Le seuil tend vers un nombre de Reynolds critique $Re_c = 1737$ lorsque Pr tend vers 0. Houchens et Walker [43], qui sont dans une configuration proche de la nôtre, trouvent un seuil égal à $Re_c = 1192.7$. Cette valeur a été obtenue en calculant le seuil à $Pr = 10^{-6}$ et $Pr = 10^{-10}$ et en constatant leur invariance. Wanschura *et al.* [109] trouvent, pour la configuration de demi-zone, un seuil égal à $Re_c = 1793$. En ne tenant compte que des deux derniers seuils, obtenus à $Pr = 0.001$ et $Pr = 0.002$, l'extrapolation vers les nombres de Prandtl nuls nous donne un nombre de Reynolds critique égal à 1322. Cette valeur est sensiblement plus proche de ce que trouvent Houchens et Walker [43]. Une comparaison des nombres de Reynolds effectifs pourrait certainement être plus que bénéfique.

Le seuil pour les grands nombres de Prandtl tend vers $Ma_c = 68000$ et la pulsation critique tend vers $\omega_c = 110$.

Nous allons nous intéresser au comportement de l'instabilité antisymétrique à $Pr = 0.01$ et $Pr = 0.2$ et symétrique à $Pr = 0.06$ qui sont caractéristiques des instabilités dominantes sur intervalles de nombres de Prandtl, respectivement $Pr \in [0.001, 0.047[$, $Pr \in]0.047, 0.085[$ et $Pr \in]0.085, 0.4]$.

3.2.4.1 Prandtl=0.01, transition par bifurcation fourche

Le mode 2 déstabilise l'écoulement stationnaire à partir de $Ma_c = 14.28$ via une bifurcation fourche. La structure de l'écoulement autour du seuil d'instabilité est présentée sur la figure 3.66 à $Ma = 16$ ainsi que les composantes de la perturbation dominante associée. Les taux de croissance des différents termes contribuant à la croissance de l'énergie cinétique en fonction du nombre de Marangoni sont représentés sur le diagramme 3.68.

L'écoulement stationnaire est composé de deux cellules contrarotatives et la température est gérée par un mécanisme de diffusion thermique. La vitesse axiale est maximale sur la surface libre en $z \simeq \pm 0.75$. La vitesse radiale est maximale le long des fronts solides proches du point triple, après le transfert de quantité de mouvement de la direction axiale à la direction radiale. La vorticité produite au point triple est déjà convectée par l'écoulement pour cette valeur du nombre de Marangoni, mais la langue de vorticité qui descend du point triple le long des lignes de courant ne se fait pas coincer entre les deux cellules contrarotatives, le long du plan médian.

Les composantes radiale et azimutale de la vitesse ainsi que la température de la perturbation sont antisymétriques par rapport au plan médian. La vitesse azimutale est représentée dans le plan $\varphi = \pi/4$. Les autres composantes sont représentées dans le plan $\varphi = 0$.

La température de la perturbation admet des extréma locaux sur la surface libre en $z \simeq \pm 0.5$. Elle est maximale en $r \simeq 0.8$ et $z \simeq \pm 0.5$. La vitesse azimutale est maximale   cette hauteur sur la surface libre. Cet extrémum local se situe   mi-chemin entre deux extréma de température successifs dans la direction azimutale. De la même manière, la vitesse axiale est maximale au milieu de la surface libre, entre deux extréma de température dans la direction axiale, comme on peut également le voir sur la développée de la surface libre de la perturbation sur la figure 3.67. Au vu de la position des extréma de θ_1 sur la surface libre et de la direction des vecteurs vitesses par rapport aux isothermes sur la développée de la surface libre de la perturbation (*c.f.* figure 3.67), on constate que la perturbation va des points froids vers les points chauds. Ceci implique que la perturbation adopte un mécanisme opposé au mécanisme thermocapillaire.

La symétrie de la perturbation est opposée   celle de l'écoulement de base, ce qui a pour effet de faire grossir, par exemple dans le plan $\varphi = 0$, la cellule de convection du haut au détriment de celle

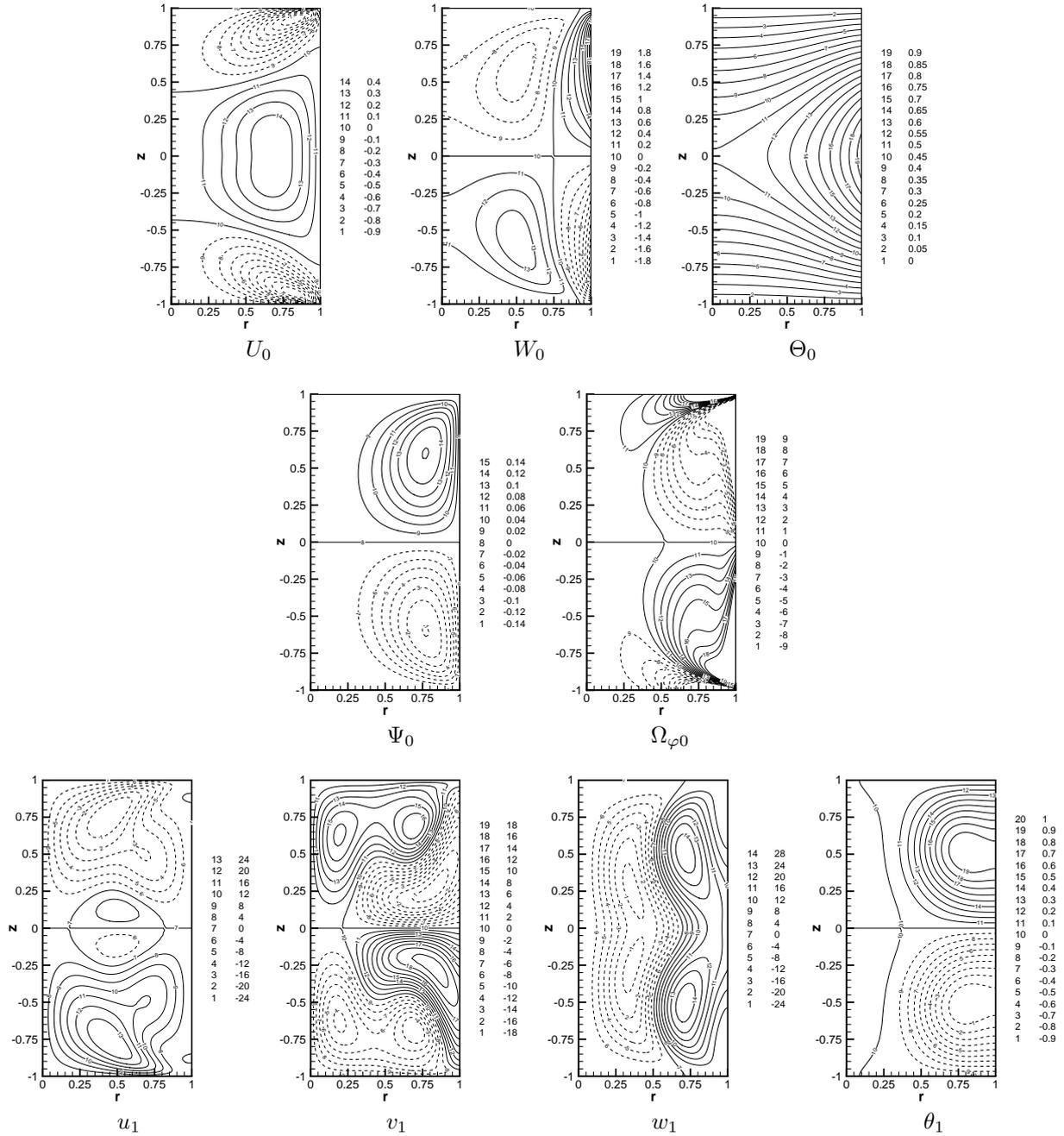


FIG. 3.66 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 , fonction de courant Ψ_0 et rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ du champ stationnaire \mathbf{U}_0 et les composantes de vitesses radiale u_1 et axiale w_1 et température θ_1 en $\varphi = 0$ et la vitesse azimutale v_1 en $\varphi = \pi/4$ de la perturbation dominante \mathbf{u}_1 pour $Pr = 0.01$, $Ma = 16$ et $N = 70 \times 100$

du bas, et inversement celle du bas au détriment de celle du haut dans le plan $\varphi = \pi/2$.

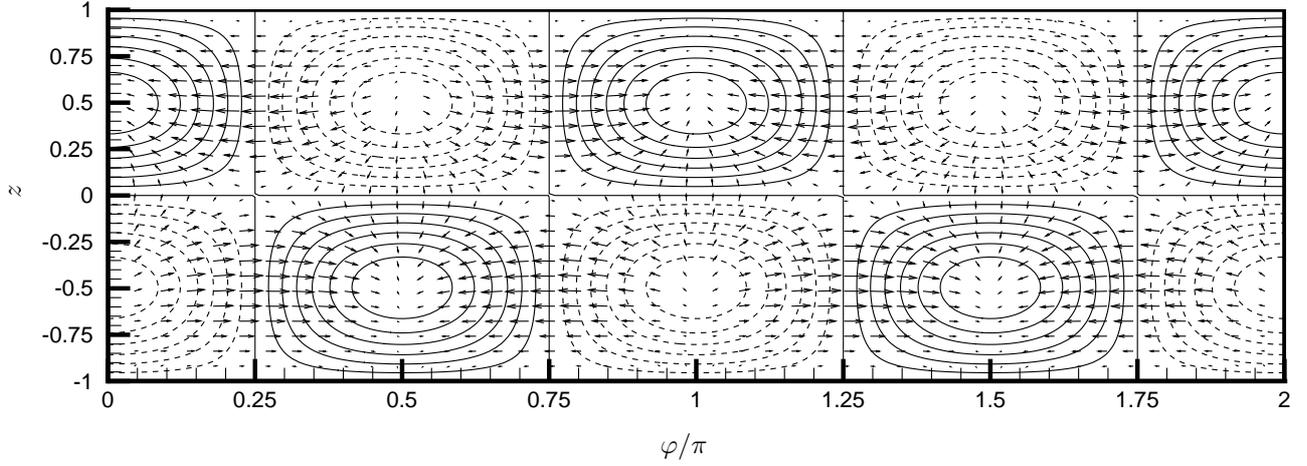


FIG. 3.67 – Vecteurs vitesse et isothermes de la perturbation stationnaire de mode 2 développés sur la surface libre pour $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$.

Les termes dominants pour chaque décomposition du taux de croissance de l'énergie cinétique sont $I_u^4 = -\int wu\partial_r W_0$ et $I_u'^4 = -\int \vec{u}_\parallel \cdot (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0$. Ces termes sont croissants mais I_u^4 est plus important que $I_u'^4$, ce qui laisse à penser que le mécanisme de déstabilisation est principalement attribué à I_u^4 . Les maxima du taux de croissance de l'énergie cinétique \dot{e}_c situés en $r = 0.75$ et $z = \pm 0.5$ sont approchés par i_u^4 , mais les maxima secondaires proches des fronts solides sont approchés par le second terme naturel dominant i_u^2 .

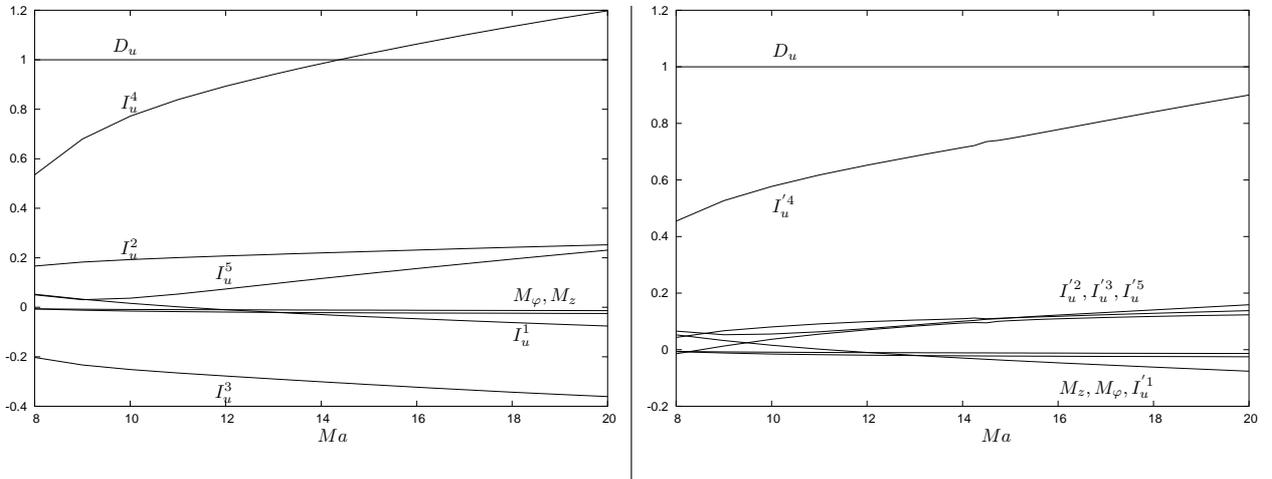


FIG. 3.68 – Termes naturels (à gauche) et centrifuges (à droite) contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction du nombre de Marangoni et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.01$

Le diagramme naturel 3.68, dont l'erreur relative sur les termes est inférieure à $10^{-3}\%$, ressemble au diagramme 3.70 présenté par Wanschura *et al.* [109], en demi-zone à $Pr = 0.02$, si on ne regarde que les valeurs entre $Re = 1300$ et $Re = 2500$. Dans les deux cas le terme dominant est I_u^4 . Les termes M_z et M_φ sont négligeables : la perturbation n'est donc pas hydrothermale mais hydrodynamique. Le comportement des différents termes contribuant au taux d'accroissement de l'énergie cinétique est, dans les deux cas, le même. Les nombres de Prandtl pour lesquels ces écoulements ont été obtenus sont assez proches, ce qui laisse à penser que les écoulements dans la demi-zone et la zone-flottante ont le même comportement pour les faibles nombres de Prandtl proches de $Pr = 0.01$. D'après Wanschura *et al.* [109] et Levenstam et Amberg [66], ce serait la contrainte induite dans la couche de

cisaillement proche de la surface libre qui nourrirait l'instabilité. Le terme I_u^4 qui amplifie la vitesse axiale de la perturbation par le transport radial du gradient radial de la vitesse axiale du champ de base illustre bien ce mécanisme. Le terme qui complète \dot{e}_c est $I_u^2 = -\int u^2 \partial_r U_0$ qui caractérise l'amplification de la vitesse radiale u_1 de la perturbation par le transport par la vitesse radiale u_1 de la perturbation du gradient radial de la vitesse radiale U_0 de l'écoulement de base. Le gradient radial de U_0 , au vu de la densité des lignes iso- U_0 sur la figure 3.66, admet un extrémum local proche des fronts solides autour de la dernière ligne de courant, vers l'extérieur, de la cellule supérieure. Ce gradient est orienté vers l'extérieur de la cellule de convection de l'écoulement. La vitesse radiale u_1 de la perturbation admet aussi un maximum local en cet endroit. Tout concourt pour obtenir un maximum local pour i_u^2 .

L'analyse faite en demi-zone par Nienhüser et Kuhlmann [80] avec la décomposition centrifuge suggère que, puisque le terme I_u^4 est dominant, l'écoulement est soumis à une instabilité centrifuge. Si c'est le cas dans la configuration de zone-flottante, nous devrions dès lors, comme Nienhüser et Kuhlmann [80], vérifier que nous entrons dans le critère de Bayly [6]. Pour cela, nous devrions calculer la circulation de la vitesse le long de lignes de courant fermées dans les cellules de convection et observer la décroissance de cette valeur en fonction du rayon moyen de la ligne de courant fermée. Ne disposant pas des outils numériques pour le faire, nous supposons que nous faisons les mêmes observations que Nienhüser et Kuhlmann [80], à savoir que le critère de Bayly [6] est vérifié à partir d'une certaine distance du centre des cellules.

La structure de la partie inférieure de la perturbation obtenue en zone-flottante pour $Pr = 0.02$, sur la figure 3.71, peut être comparée à la perturbation obtenue pour la demi-zone à $Pr = 0.02$ (*c.f.* figure 3.3 en page 39). La structure de la perturbation de la zone-flottante dans ce cas est quasiment identique à celle obtenue à $Pr = 0.01$.

Jusqu'à quel point la demi-zone représente la zone-flottante, c'est à cette question que nous allons tenter de répondre. Par analogie avec la demi-zone, on peut dire que pour la zone-flottante le front solide "froid" est situé en $z = -1$ et le front solide "chaud" en $z = 0$. La forme des champs de température des deux perturbations présentent de fortes ressemblances. La différence majeure concerne les isothermes zéro de la perturbation de la zone-flottante qui s'approchent plus de l'axe que celles de la demi-zone. Cependant les composantes intéressantes sont les vitesses u_1 et w_1 de la perturbation. La présence d'un front solide dans la demi-zone sur lequel il y a adhérence et non pénétration a pour conséquence une vitesse radiale u_1 plus forte près de ce plan. Pour les mêmes raisons, on observe pour les champs stationnaires une différence sur la vitesse axiale proche du plan médian/front solide : le pic est plus prononcé dans le cas de la demi-zone.

Le transfert de quantité de mouvement lorsque une composante vitesse s'annule fait augmenter l'autre composante dans la zone incriminée. Les profils de température et de vitesse axiale des deux configurations, le long de la surface libre, sont représentés sur les diagrammes à la figure 3.73. La température de la surface libre de la demi-zone est quasi-linéaire car la température est principalement soumise à la diffusion thermique entre deux plaques planes isothermes, les effets thermocapillaires étant très faibles. Ce n'est pas le cas de la zone-flottante pour qui la température est diffusée à partir d'un flux de chaleur sur la surface libre. Cependant le profil de température de la zone-flottante sur la surface libre s'approche d'un profil linéaire au voisinage des fronts solides. La vitesse axiale des deux configurations présentent la même allure, même si les nombres de Marangoni ne sont pas les mêmes. Les extréma se situent en $z = -0.77$ pour la demi-zone et en $z = -0.74$ pour la zone-flottante. La vitesse de la zone-flottante est plus élevée sur la surface libre que dans la demi-zone. Ceci est dû, d'une part, au plus fort gradient thermique axial de la zone-flottante au voisinage de $z \simeq -0.75$ et, d'autre part, au nombre de Marangoni plus élevé pour la zone-flottante. La contrainte imposée sur la surface libre est alors plus grande, ce qui induit une vitesse axiale plus élevée.

3.2.4.2 Prandtl=0.06, transition par bifurcation fourche

Sur l'intervalle de nombre de Prandtl [0.047, 0.085], le mode instable devient symétrique. La figure 3.74 montre un mode accompagné du champ stationnaire qu'il déstabilise à $Pr = 0.06$ et $Ma = 280$. Le seuil de cette instabilité se situe à $Ma_c = 269$.

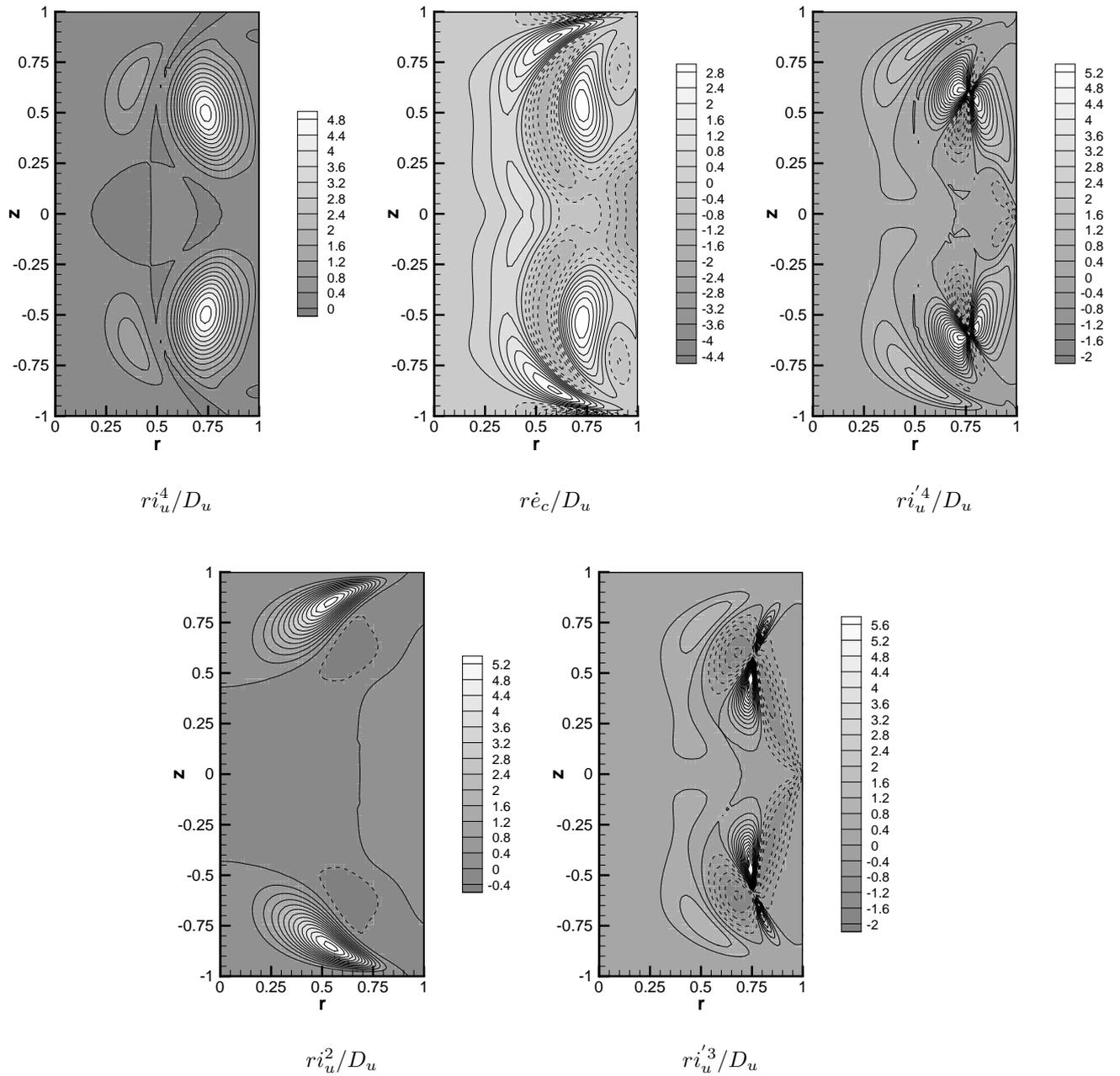


FIG. 3.69 – Distributions spatiales i_u^4 , e_c , $i_u'^4$, i_u^2 , et $i_u'^3$ multipliées par r et normalisés par D_u . $Pr = 0.01$, $Ma = 16$

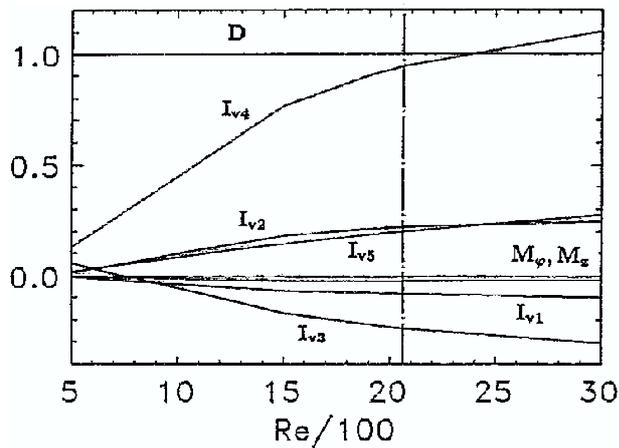


FIG. 3.70 – Termes naturels contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique pour la demi-zone, présentés par Wanschura *et al.* [109] en fonction du nombre de Reynolds et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.02$

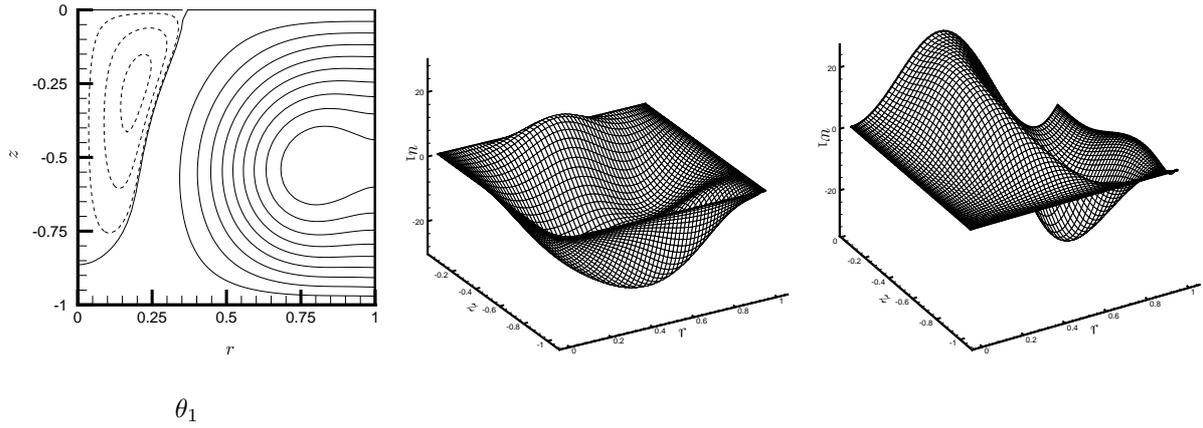


FIG. 3.71 – Composantes de température et de vitesse radiale et axiale de la perturbation dominante de mode 2 à $Pr = 0.02$ et $Ma = 33$

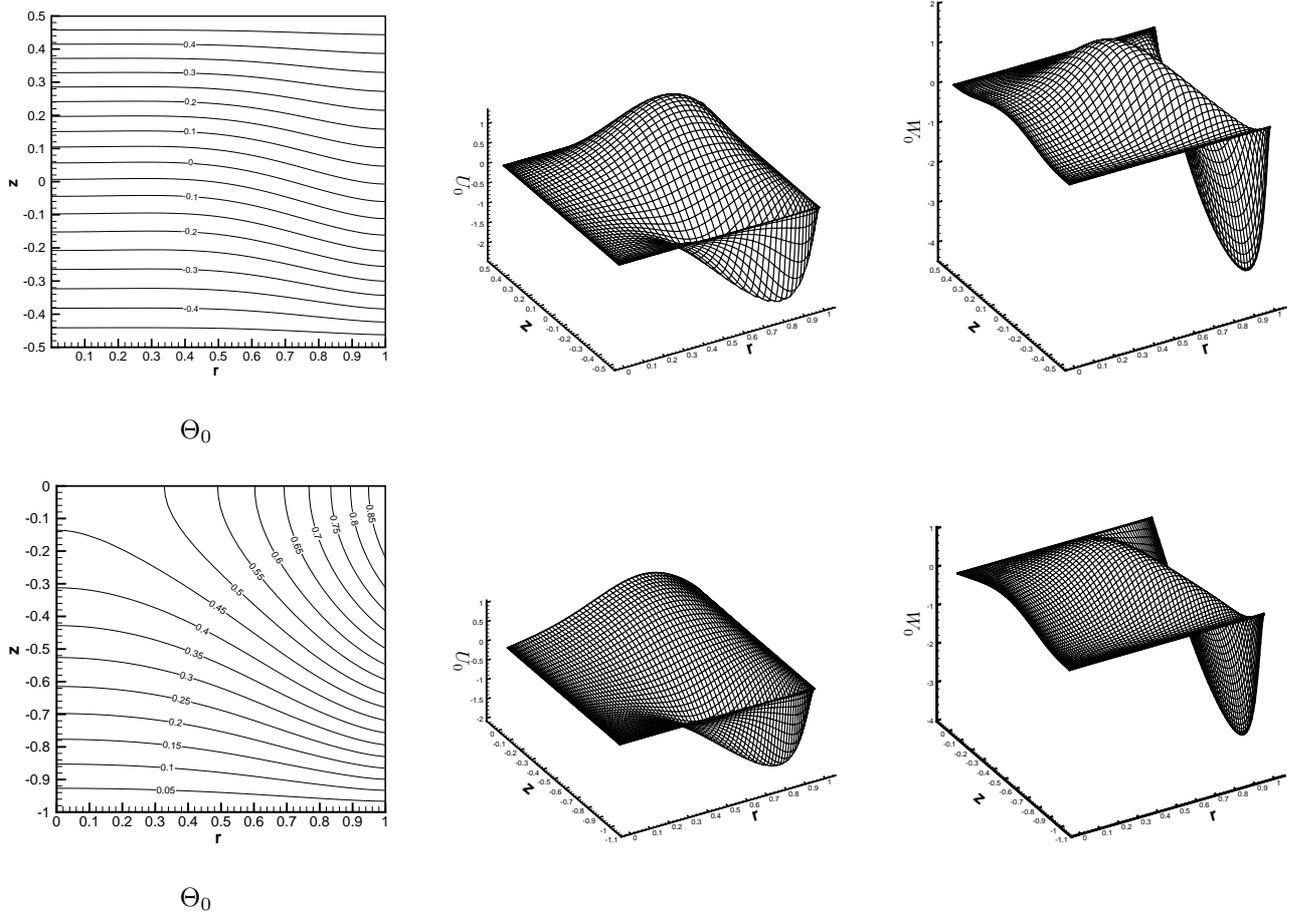


FIG. 3.72 – Composantes de température et de vitesse radiale et axiale du champ stationnaire de demi-zone à $Pr = 0.02$ et $Ma = 42$ en haut et du demi champ stationnaire de la zone-flottante à $Pr = 0.02$ et $Ma = 33$ en bas

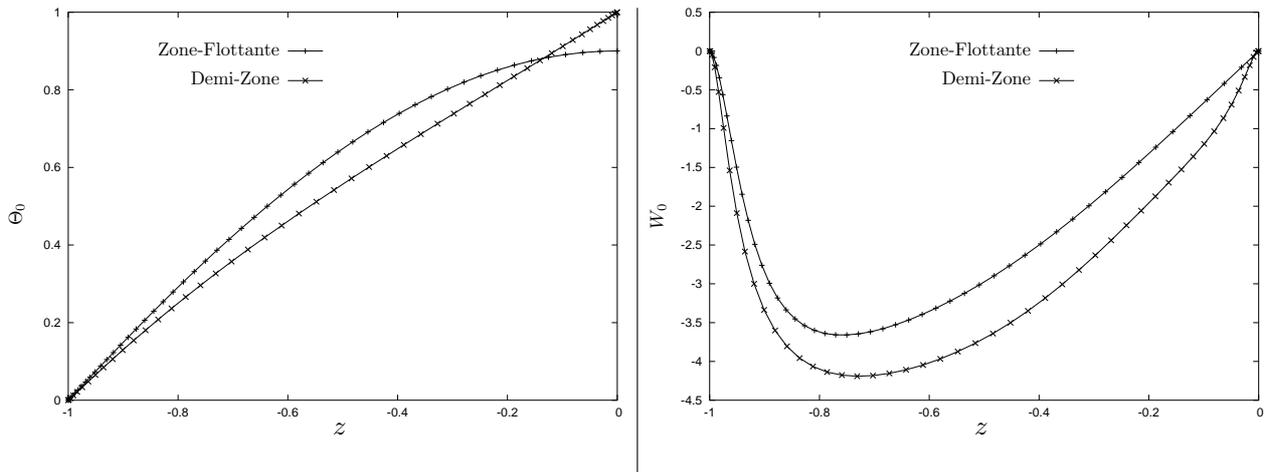


FIG. 3.73 – Profils sur la surface libre de la température (à gauche) et de la vitesse axiale (à droite) des champs stationnaires en demi-zone ($Ma = 42$) et en zone-flottante ($Ma = 33$) à $Pr = 0.02$

Le champ stationnaire possède la même structure que celle vue à $Pr = 0.01$, à ceci près que dans ce cas les vitesses radiale et axiale sont plus élevées et que le maximum de température a diminué. Cette dernière est convectée par l'écoulement qui est devenu plus rapide et la vitesse de diffusion thermique a diminué. Des recirculations apparaissent à la jonction de l'axe et des fronts solides.

La perturbation a changé de nature par rapport à celle vue à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$ qui est antisymétrique. Toutes les composantes sont symétriques à l'exception de w_1 qui est antisymétrique et ses grandes structures sont similaires à la perturbation antisymétrique. La température est maximale en $r \simeq 0.75$ et $z \simeq \pm 0.6$ et admet deux extréma locaux sur la surface libre en $z \simeq \pm 0.6$. Les extréma locaux de la vitesse azimutale et radiale se trouvent dans les mêmes zones que ceux de mêmes vitesses pour la perturbation observée à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$. La perturbation modifie l'écoulement stationnaire, dont la vitesse azimutale est nulle, et cloisonne les cellules de convection de part et d'autre du plan médian et dans chaque quartier du cylindre. Ces cellules sont corotatives dans la direction azimutale. Les deux cellules de l'écoulement de base subissent dans chaque plan azimutal la même contrainte de la part de la perturbation. Par exemple, dans le plan $\varphi = 0$, les deux cellules sont ralenties par la perturbation alors qu'elles sont accélérées dans le plan $\varphi = \pi/4$. Ce mécanisme est opposé à celui observé pour la perturbation antisymétrique à $Pr = 0.01$ pour lequel deux cellules disposées de part et d'autre du plan médian ont un écoulement azimutal opposé.

La développée de la perturbation sur la surface libre, sur la figure 3.75, nous montre que la vitesse de la perturbation va principalement des zones froides vers les zones chaudes dans une large bande centrée sur la ligne médiane. Il se trouve qu'une faible partie de la perturbation, proche des fronts solides, va des zones chaudes vers les zones froides. Malgré cela, il ne semble pas que le mécanisme soit d'origine thermocapillaire, mais il s'agirait plutôt d'un mécanisme hydrodynamique. Ceci est confirmé par l'analyse en énergie, dont on peut voir la décomposition en composantes naturelles et centrifuges sur la figure 3.76. L'erreur relative, $\delta_{\dot{e}_c}$ et $\delta_{\dot{e}_\theta}$, commise sur les taux de croissance est inférieure à $10^{-3}\%$. Les termes de couplage M_z et M_φ sont faibles devant la dissipation visqueuse et les autres termes. Ils n'interviennent donc pas dans l'alimentation en énergie de l'instabilité.

Sur la même figure 3.76, on peut voir que les termes dominants composant le taux de croissance de l'énergie cinétique sont $I_u^4 = -\int wu\partial_r W_0$ et $I_u^4 = -\int \vec{u}_\parallel \cdot (\vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0$. Ils sont croissants, mais I_u^4 prend des valeurs plus grandes que I_u^4 et dépasse la dissipation visqueuse D_u pour un nombre de Marangoni proche du seuil. Les termes secondaires sont pour chacune des deux décompositions $I_u^5 = -\int w^2\partial_z W_0$ et $I_u^5 = -\int \vec{u}_\parallel \cdot (\vec{u}_\parallel \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0$. Cependant, dans le cas de la décomposition centrifuge, I_u^5 décroît alors que $I_u^2 = -\int \vec{u}_\perp \cdot (\vec{u}_\parallel \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0$ croît à un rythme un peu plus soutenu et, dans le cas de la décomposition naturelle, I_u^5 croît alors que $I_u^2 = -\int uw\partial_z U_0$ décroît.

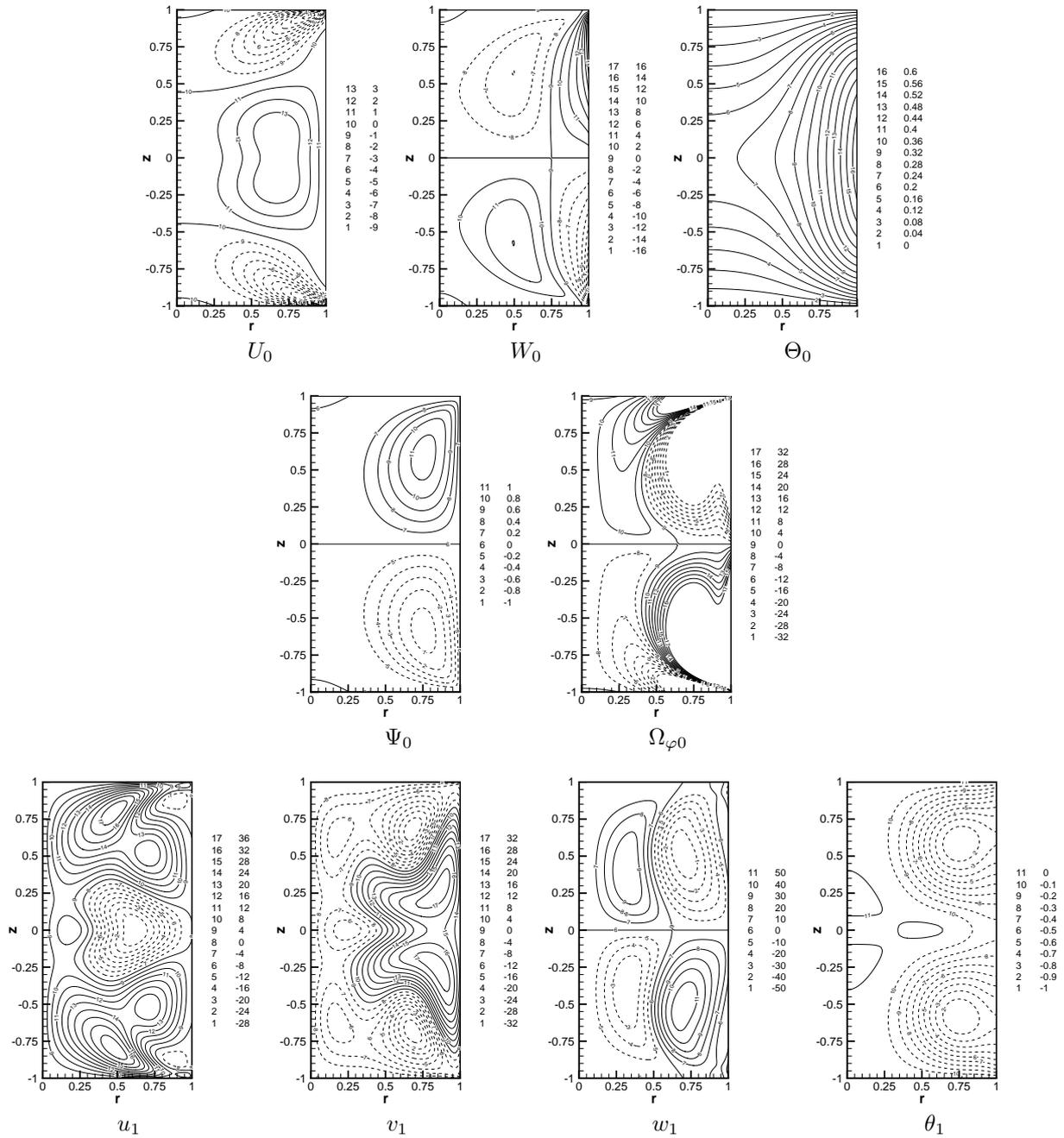


FIG. 3.74 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 , fonction de courant Ψ_0 et rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ du champ stationnaire \mathcal{U}_0 et les composantes de vitesses radiale u_1 et axiale w_1 , température θ_1 en $\varphi = 0$ et la vitesse azimutale v_1 en $\varphi = \pi/4$ de la perturbation dominante u_1 pour $Pr = 0.06$, $Ma = 280$ et $N = 100 \times 150$

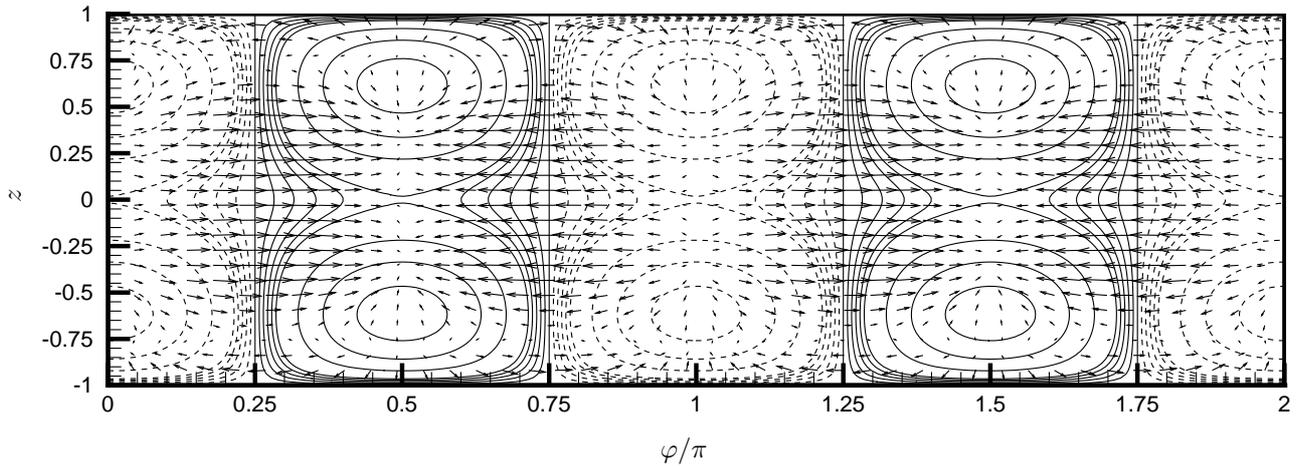


FIG. 3.75 – Vecteurs vitesse et isothermes de la perturbation stationnaire de mode 2 développés sur la surface libre pour $Pr = 0.06$ et $Ma = 280$

La distribution spatiale du taux de croissance de l'énergie cinétique (*c.f.* figure 3.77) présente des extréma locaux aux mêmes endroits qu'à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$. Cette similitude réside dans la ressemblance des perturbations dominantes obtenues ici et à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$ (*c.f.* figure 3.66). Les deux perturbations possèdent des extréma, pour les vitesses axiale et radiale, aux mêmes endroits : proches des fronts solides et du centre des cellules de convection. Les composantes qui reproduisent au mieux les maxima de la distribution spatiale du taux de croissance de l'énergie cinétique sont I_u^4 et I_u^2 pour la décomposition naturelle, et au moins I_u^4 pour la décomposition centrifuge. Bien que I_u^5 ait une valeur plus grande que I_u^2 , sa distribution spatiale ne représente pas pour autant les maxima locaux de \dot{e}_c non représentés par i_u^4 . Le mécanisme à l'origine de la déstabilisation serait de même nature que celui opérant à $Pr = 0.01$. Le cisaillement de la vitesse axiale proche du centre des cellules alimente la perturbation en énergie, ce qui penche en faveur de l'hypothèse de Levenstam et Amberg [66] concernant l'instabilité d'un anneau de vortacité constante.

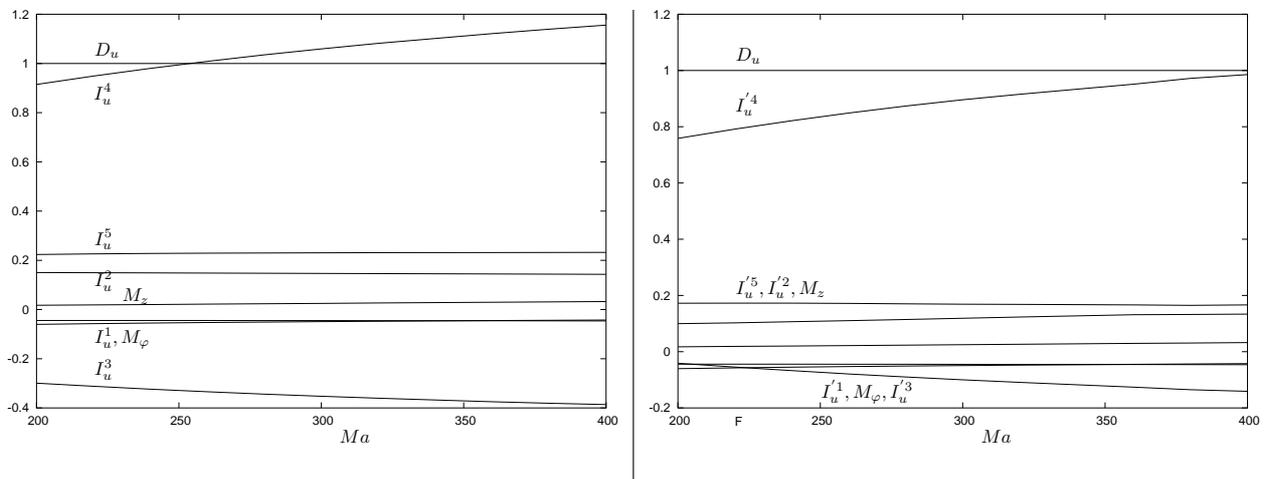


FIG. 3.76 – Termes naturels (à gauche) et centrifuges (à droite) contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction du nombre de Marangoni et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.06$

3.2.4.3 Prandtl=0.2, transition par bifurcation fourche

Le mode propre dominant devient à nouveau antisymétrique sur l'intervalle de nombre de Prandtl $[0.085, 0.4]$. La figure 3.78 représente le champ stationnaire et son mode propre dominant à $Pr = 0.2$ et $Ma = 3200$. Le seuil se situe, pour $Pr = 0.2$, à $Ma_c = 3173$.

La structure de la vitesse du champ stationnaire est similaire à celle des deux écoulements vus à $Pr = 0.01$ et $Pr = 0.06$. Les valeurs maximales de la vitesse radiale et axiale ont augmenté, mais

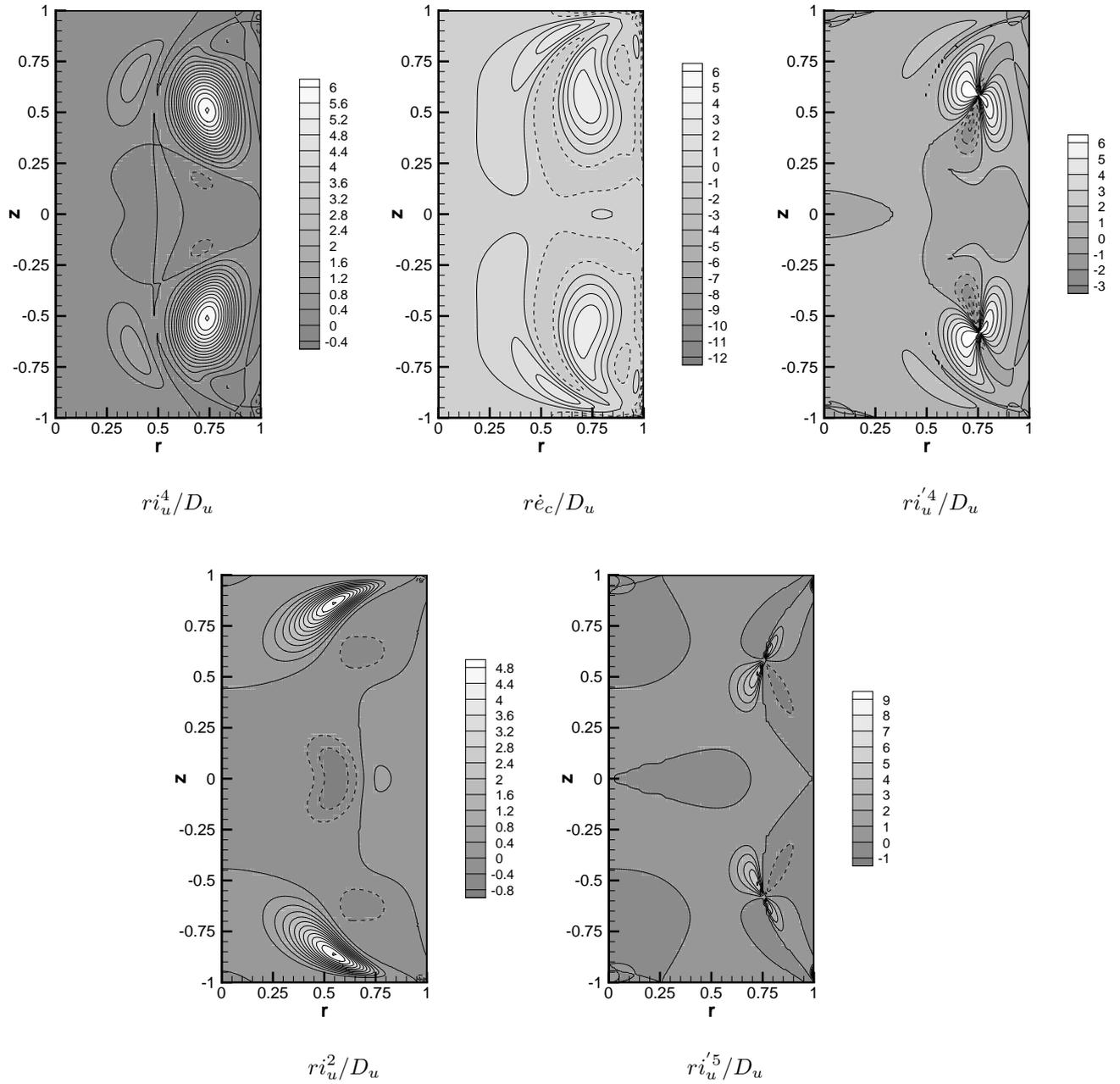


FIG. 3.77 – Distributions spatiales i_u^4 , e_c , $i_u'^4$, i_u^2 , et $i_u'^5$ multipliées par r et normalisées par D_u . $Pr = 0.06$, $Ma = 280$ et $k = 2$

les maxima se situent, pour la vitesse axiale, sur la surface libre proche des fronts solides, et, pour la vitesse radiale, proche des fronts solides et du point triple. Des recirculations apparaissent à la jonction de l'axe et des fronts solides. Le maximum de la température a diminué par rapport au maximum de température de l'écoulement à $Pr = 0.06$ et $Ma = 280$. L'explication est la même que celle apportée à la section 3.2.4.2. Le temps caractéristique de diffusion thermique augmente avec le nombre de Prandtl, et la vitesse de convection thermique augmente avec le nombre de Marangoni, donc la chaleur n'a pas le temps de s'accumuler à la surface libre, ce qui fait baisser le maximum de température. D'ailleurs, les isothermes de l'écoulement stationnaire sont plus déformés que les deux précédents écoulements décrits. La convection thermique commence à se manifester car on peut voir que les isothermes proches du plan médian ne sont plus concaves mais convexes, ce qui indique que du fluide froid provenant de l'intérieur de la cavité remonte le long du plan médian. Il n'a pas encore d'effet sur la température à surface libre. Le rotationnel est convecté des points triples par l'écoulement le long des lignes de courant. La vorticit e provenant des points triples ne se fait pas encore coincer entre les deux cellules contrarotatives.

La perturbation est antisym etrique, mais ne poss ede plus la m eme structure que celle vue  a $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$. L'isovaleur nulle des vitesses et de la temp erature de la perturbation montre que la structure de la perturbation a chang e. La vitesse radiale est partag ee en 4 zones d' egale importance ; l'isovaleur nulle se connecte sur l'axe en $z = \pm 0.35$ alors qu' a $Pr = 0.01$ cette isovaleur se reconnectait sur le plan m edian. C'est aussi  a cette hauteur sur l'axe qu'on trouve l'isovaleur nulle de la vitesse azimutale de la perturbation alors qu' a $Pr = 0.01$, la reconnection se faisait  egalement sur le plan m edian. La vitesse axiale voit aussi son isovaleur nulle connect ee  a l'axe en $z = \pm 0.05$. Le maximum de la vitesse radiale de la perturbation se situe proche des fronts solides, en $r = 0.6$, presque au m eme endroit que celui de la perturbation  a $Pr = 0.01$. Des maxima locaux apparaissent sur une ligne joignant le point triple au point milieu du plan m edian. La vitesse azimutale est maximale en $r = 0.75$ et $z = \pm 0.75$. Elle admet quatre extr ema sur la surface libre : deux de m eme signe en $z = 0.4$ et $z = -0.05$ et deux autres de signe opposée située en $z = -0.4$ et $z = 0.05$. La vitesse axiale de la perturbation a ses maxima en $r = 0.75$ et $z = \pm 0.5$, aux m eme endroits que ceux de la perturbation  a $Pr = 0.01$. Elle change de signe sur la surface libre en $z = \pm 0.5$. La temp erature de la perturbation admet sur la surface libre quatre extr ema locaux en $z = \pm 0.75$ et $z = \pm 0.3$. Elle change de signe en $z = \pm 0.5$ et $z = 0$. Les maxima de la temp erature se trouvent en $r = 0.7$ et $z = \pm 0.7$.

La d evelopp ee de la perturbation sur la surface libre, sur la figure 3.79, fait clairement apparaître quatre cellules thermiques dans la direction axiale alors qu' a $Pr = 0.01$ il n'y en a que deux. La perturbation est orient ee des points chauds vers les points froids. Il semble qu'on soit en pr esence d'un m ecanisme thermocapillaire, mais ce n'est pas lui qui serait  a l'origine de la perturbation d'apr es la d ecomposition du taux de croissance de l'énergie cin etique.

Avec la perturbation, l'écoulement devient cloisonnée en quartiers. La vitesse azimutale de la perturbation est la seule  a d eplacer le fluide dans la direction azimutale. Les cellules de l'écoulement, contrarotatives le long du plan m edian dans la direction radiale, sont contrarotatives dans la direction axiale.

Sur les diagrammes (*c.f.* figure 3.80) repr esentant la d ecomposition, en termes naturels et centrifuges, du taux de croissance de l'énergie cin etique, les termes dominants sont respectivement $I_u^4 = -\int wu\partial_r W_0$ et $I_u'^4 = -\int \vec{u}_{\parallel} \cdot (\vec{u}_{\perp} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0$. Ces deux termes ont le taux de variation le plus élevée, n eanmoins c'est $I_u'^4$ qui domine I_u^4 , et I_u^4 qui a un taux de variation plus grand que $I_u'^4$. La distribution spatiale de ces deux termes, i_u^4 et $i_u'^4$, approche les maxima du taux de croissance de l'énergie cin etique \dot{e}_c . Le maximum de i_u^4 vaut celui de \dot{e}_c ; il semblerait que ce soit ce terme qui approche plus \dot{e}_c , m eme si la forme du pic de $i_u'^4$ s'approche de la forme en goutte du pic de \dot{e}_c . Les pics secondaires sont approchées par les termes poss edant le taux de croissance le plus élevée apr es les termes dominants. Il s'agit de I_u^2 , et I_u^1 . Les maxima secondaires, aussi en forme de goutte et plus proches des fronts solides que les maxima principaux, sont mieux approchées par i_u^2 que par i_u^1 . L'erreur relative, $\delta_{\dot{e}_c}$ et $\delta_{\dot{e}_o}$, commise sur les taux de croissance est inf erieure  a $10^{-3}\%$.

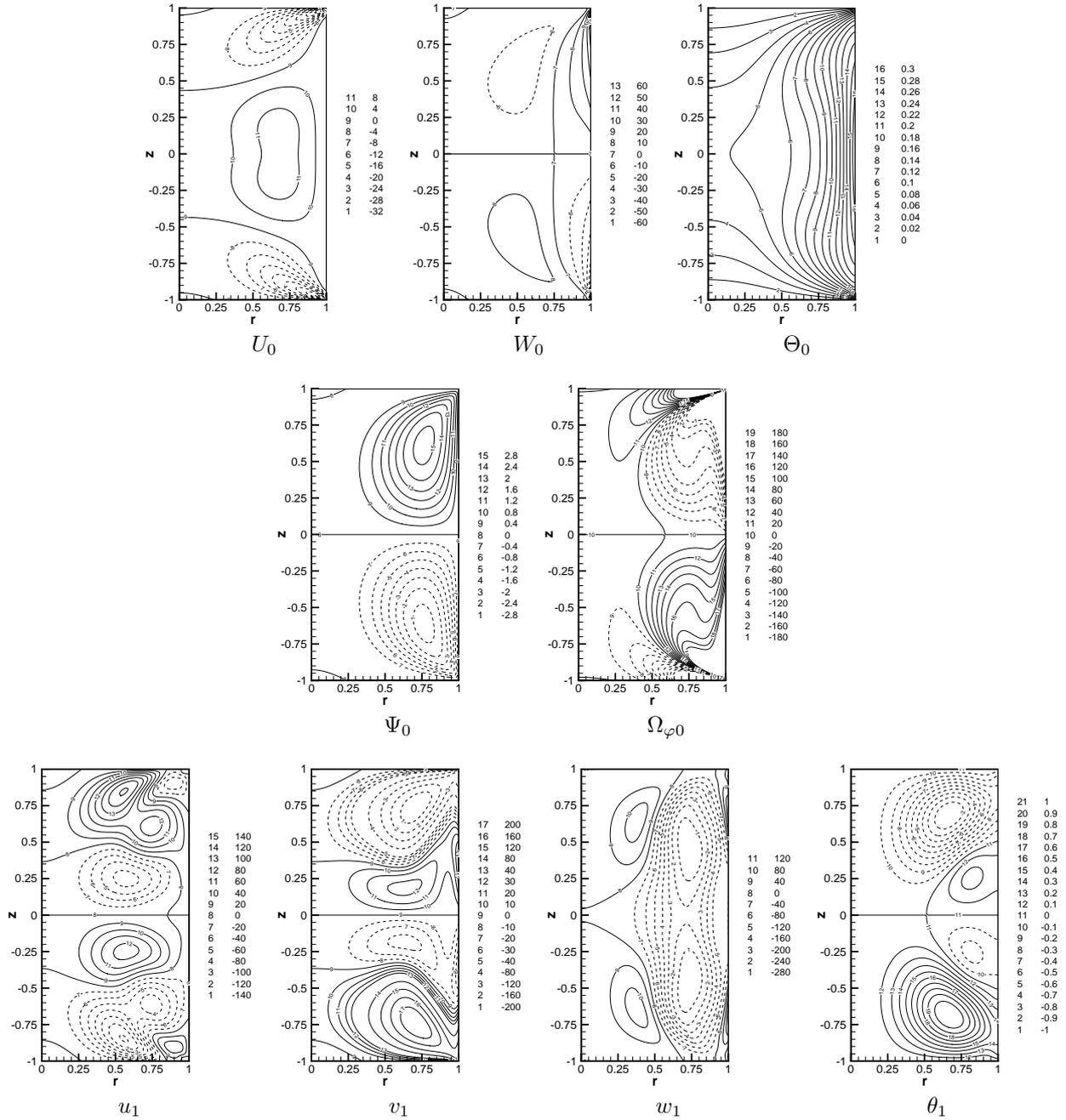


FIG. 3.78 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 , fonction de courant Ψ_0 et rotationnel $\Omega_{\varphi 0}$ du champ stationnaire \mathcal{U}_0 instable et les composantes de vitesses radiale u_1 et axiale w_1 , température θ_1 en $\varphi = 0$ et la vitesse azimutale v_1 en $\varphi = \pi/4$ de sa perturbation dominante de mode 2 u_1 pour $Pr = 0.2$, $Ma = 3200$ et $N = 100 \times 150$

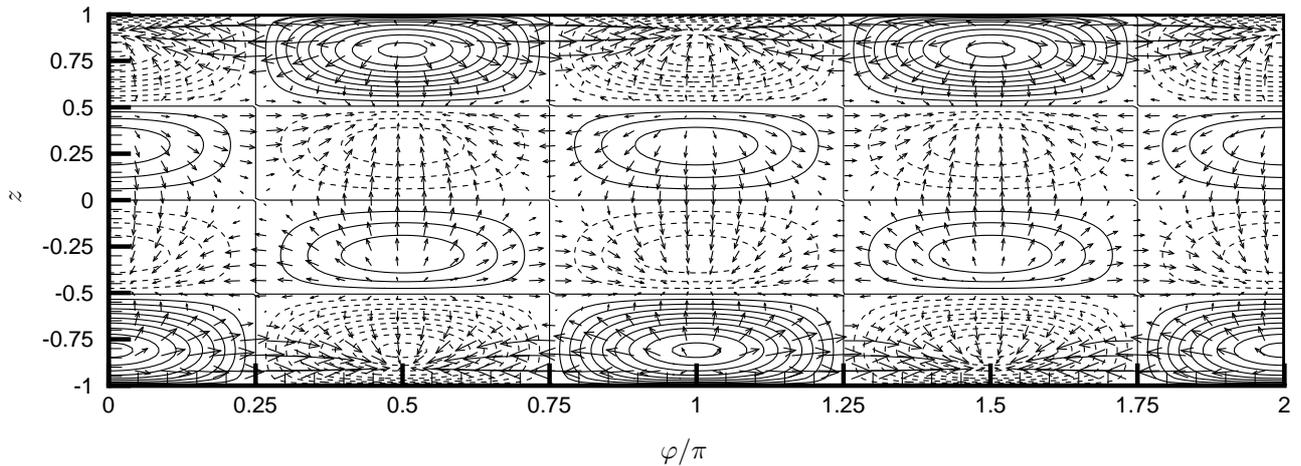


FIG. 3.79 – Vecteurs vitesse et isothermes développés de la perturbation stationnaire de mode 2 sur la surface libre pour $Pr = 0.2$ et $Ma = 3200$.

Le comportement thermocapillaire de la perturbation sur la surface libre est certainement dû à la valeur des nombres de Prandtl et de Marangoni pour lesquels le système ne peut plus "négliger" la convection thermique. La valeur du nombre de Marangoni impose un comportement thermocapillaire, d'où l'apparition dans la température de la perturbation de deux zones de part et d'autre du plan médian qui préservent la symétrie globale de la vitesse de la perturbation. Imaginons que la perturbation à $Pr = 0.2$ ressemble à celle à $Pr = 0.01$, mais avec un mécanisme thermocapillaire. Dans ce cas, sur la figure 3.66, le champ de la température de la perturbation devrait être de signe opposé. Dans le plan $\varphi = 0$, la vitesse axiale sur la surface libre au dessus du plan médian augmente alors que la température diminue. C'est difficilement concevable. Les composantes de la perturbation à $Pr = 0.2$ (*c.f.* figure 3.78) gardent globalement la même structure qu'à $Pr = 0.01$ avec quelques remaniements sur la surface libre pour rendre compte d'un mécanisme thermocapillaire.

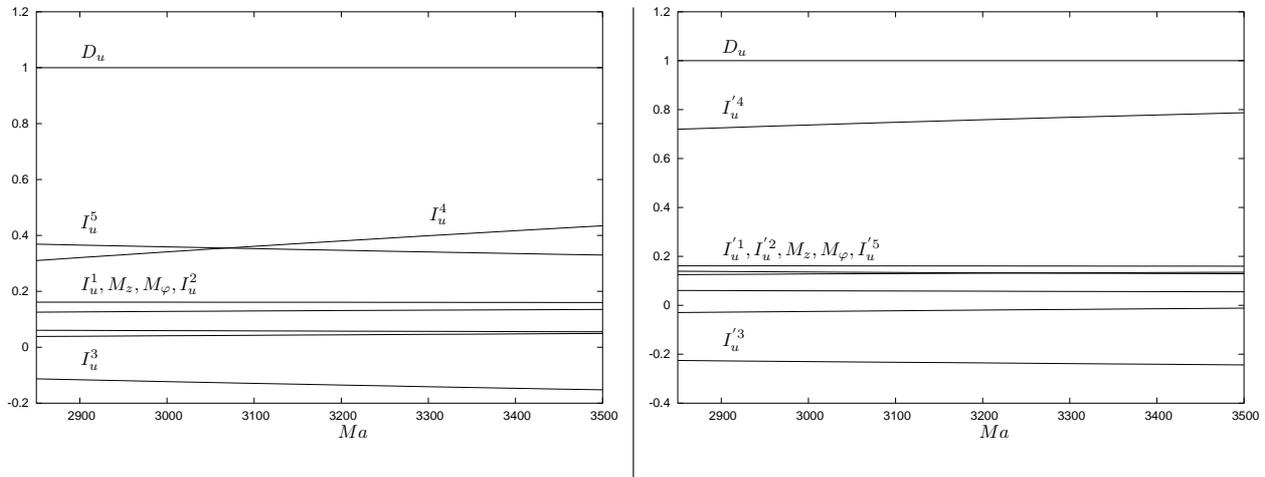


FIG. 3.80 – Termes naturels (à gauche) et centrifuges (à droite) contribuant au taux de croissance de l'énergie cinétique en fonction du nombre de Marangoni et normalisés par la dissipation D_u . $Pr = 0.2$ et $k = 2$

A priori, le taux de variation de I_u^4 , plus élevé que celui de I_u^4 , et la meilleure approche de \dot{e}_c par \dot{i}_u^4 de par la valeur de son maximum font que le mécanisme d'alimentation de l'instabilité en énergie est encore identifié par le mécanisme représenté par I_u^4 . Un mécanisme d'alimentation secondaire est identifié par le terme I_u^2 .

3.2.5 Discussion

Nous avons vu qu'à hauts nombres de Prandtl la perturbation se fait via une bifurcation de Hopf, le mode déstabilisant étant un mode 1. Notons la concordance entre nos résultats et ceux obtenus

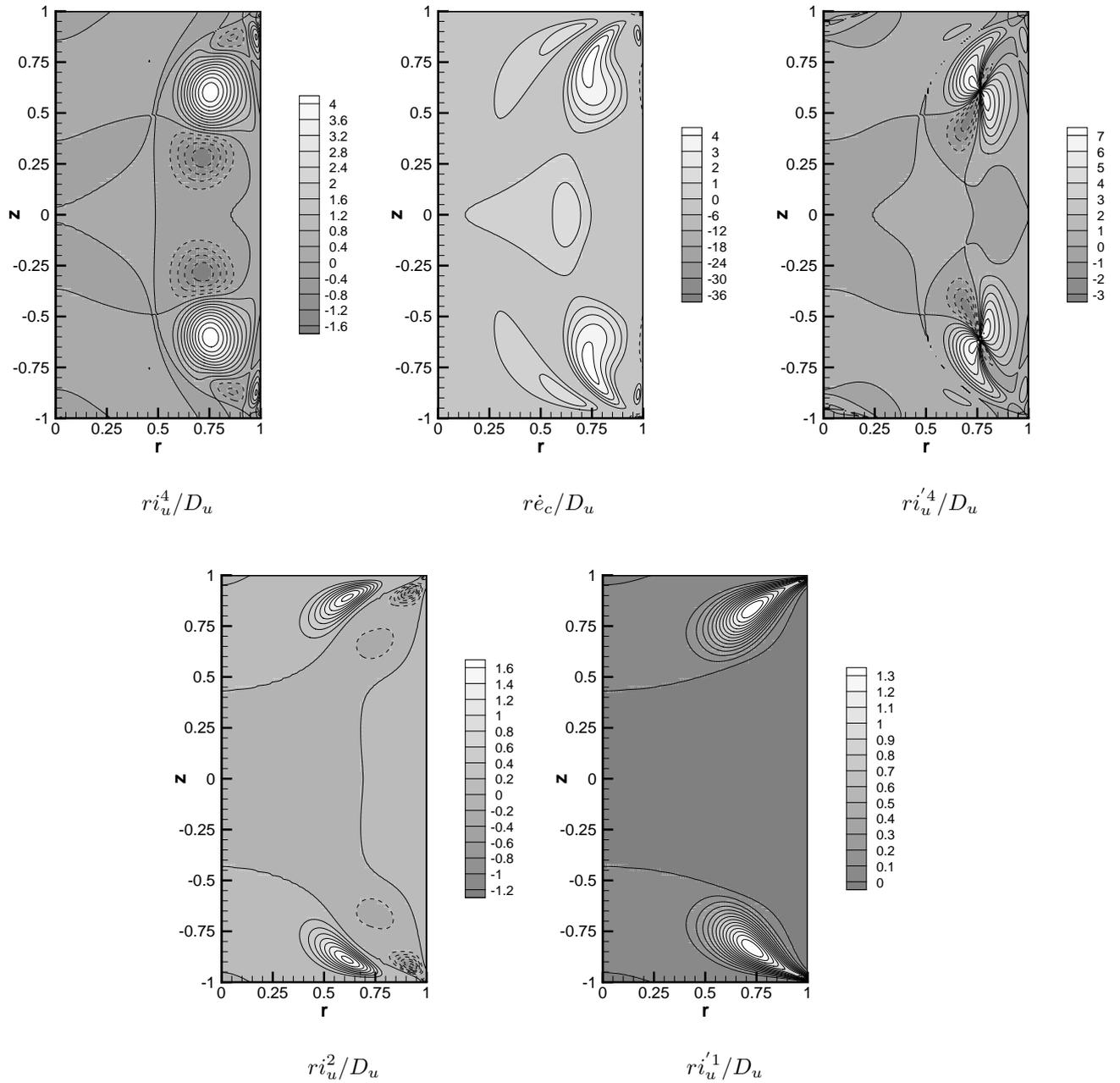


FIG. 3.81 – Distributions spatiales i_u^4 , $i_u'^4$, i_u^2 , et $i_u'^1$ multipliées par r et normalisées par D_u . $Pr = 0.2$, $Ma = 3200$

en demi-zone infiniment allongée par Smith et Davis [99] et Xu et Davis [112] sur le nombre d'onde azimutal le plus déstabilisant et le type de bifurcation ainsi que sur le mécanisme d'alimentation en énergie de la perturbation dominante.

Aux faibles nombres de Prandtl, l'écoulement se déstabilise via une bifurcation fourche de mode 2. C'est une perturbation de même mode qui déstabilise la demi-zone à faibles nombres de Prandtl. A $Pr = 0.01$, les perturbations de la demi-zone et de la zone-flottante ont des structures similaires. Les seuils d'instabilité lorsque le nombre de Prandtl tend vers 0 sont aussi très proches [109]. La valeur obtenue par Houchens et Walker [43] étant différente, ceci devrait nous enjoindre à en chercher la raison, peut être dans la forme du flux de chaleur.

Le mécanisme alimentant la perturbation en énergie peut être expliqué par un cisaillement de la vitesse axiale de l'écoulement de base à la vitesse axiale de la perturbation via la vitesse radiale de la perturbation, déjà identifié par Wanschura *et al.* [109] en demi-zone,. Ce mécanisme semble être celui de la déformation d'un anneau de vorticit   infiniment fin dont parle Levenstam et Amberg [66].

L'analyse en   nergie et l'identification visuelle des termes qui approchent le mieux le taux de croissance de l'  nergie permet d'associer les termes qui ont le taux de variation le plus   lev   avec ceux qui s'approchent structurellement le plus du taux de croissance de l'  nergie. Cependant, les termes secondaires ne suivent pas n  cessairement cette r  gle. Pour le mode $k=2$ et    bas nombres de Prandtl, le terme secondaire s'approchant structurellement le plus de la distribution spatiale du taux de croissance de l'  nergie est i_u^2 . A $Pr = 0.01$, I_u^5 est le terme secondaire qui varie le plus alors que I_u^2 ne varie pas autant, mais lui est quand m  me sup  rieur ; alors qu'   $Pr = 0.2$, c'est I_u^5 qui est sup  rieur    I_u^2 et qui varie, de mani  re absolue, le plus rapidement.

En conclusion, la zone-flottante et la demi-zone ont un comportement similaire    faibles nombres de Prandtl ($Pr < 0.01$), mais certaines propri  t  s telles que le changement de sym  trie du mode propre dominant n'ont pas   t   mises en   vidence en demi-zone. En effet, la demi-zone est sens  e mod  liser une demie zone-flottante, en rempla  ant entre autre le plan m  dian de cette derni  re par un front solide. L'  coulement mod  lis   par la demi-zone est donc pr  suppos   sym  trique et ne peut donc pas voir sa sym  trie chang  e.

Chapitre 4

Zone-flottante 3D

Les études numériques sont nécessaires pour appréhender les processus physiques modèles qui n'ont pas de solution analytique. La complexité des modèles va croissant, c'est pour cela qu'après un modèle de perturbation linéaire 3D du mode axisymétrique 2D, il convient d'envisager le passage du modèle à la troisième dimension en prenant en compte les non-linéarités. Nous avons vu au chapitre 3 que la troisième direction devait être prise en compte. Nous verrons dans ce chapitre les premiers résultats de calculs spectraux obtenus en zone-flottante.

4.1 Méthode numérique

La résolution des équations du modèle de zone-flottante en trois dimensions d'espace et une dimension temporelle n'est pas compliquée lorsqu'on sait résoudre les équations du problème linéarisé en perturbations 3D de l'écoulement stationnaire 2D.

Les variables sont décomposées en série de Fourier [32] dans la direction azimutale et en collocation pseudospectrale vue lors de la description de la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations du modèle axisymétrique en deux dimensions. La décomposition des variables et leur substitution dans les équations 3D fait apparaître un découplage des modes de Fourier entre eux. Les équations seront résolues dans l'espace de Fourier dans la troisième direction. Seul le terme non-linéaire nous contraint à passer les variables dans l'espace physique pour les calculer et ensuite à repasser dans l'espace de Fourier dans la direction azimutale pour résoudre les équations. La résolution des équations dans l'espace de Fourier dans la direction azimutale suit le même processus que la résolution des équations linéarisées.

4.2 Validation

Une première validation a été effectuée pour des paramètres correspondant à l'écoulement axisymétrique. L'écart entre les résultats obtenus par la résolution du système 2D axisymétrique et le système 3D complet est de l'ordre de la précision machine.

Nous avons choisi de poursuivre la validation de nos calculs en comparant nos résultats à ceux obtenus par Levenstam et Amberg [66] et Zeng *et al.* [114] en demi-zone. Nous avons donc calculé pour $Re = 3500$ et $Pr = 0.01$ les maxima de vitesse et de vitesse azimutale en fonction de différents maillages. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1. Le critère de convergence est la minimisation du maximum des fluctuations relatives locales.

Le comportement des maxima en fonction du maillage est cohérent avec ce que Levenstam et Amberg [66] observent : le maximum de la vitesse diminue lorsque le maillage augmente, alors que, globalement, la vitesse azimutale augmente avec le nombre de mailles dans les directions azimutale et axiale. L'écart sur les maxima entre les simulations faites dans le cadre de ce travail et par Levenstam et Amberg [66] avec le maillage $30 \times 48 \times 30$ est de l'ordre de 0.2%.

	Grille($N_r \times N_\phi \times N_z$)	U_{max}	$U_{\phi max}$
Levenstam et Amberg [66]	$10 \times 16 \times 10$	0.08876	0.0115
Levenstam et Amberg [66]	$20 \times 16 \times 20$	0.08872	0.0130
Levenstam et Amberg [66]	$20 \times 32 \times 20$	0.08671	0.0132
Levenstam et Amberg [66]	$30 \times 48 \times 30$	0.08647	0.0134
Zeng <i>et al.</i> [114]	?	0.088	0.014
ce travail	$20 \times 16 \times 20$	0.08668	0.0130
ce travail	$40 \times 16 \times 40$	0.08660	0.0134
ce travail	$20 \times 32 \times 20$	0.08639	0.0129
ce travail	$30 \times 48 \times 30$	0.08629	0.0132

TAB. 4.1 – Résultats pour différentes grilles, pour $Re = 3500$ et $Pr = 0.01$

4.3 Écoulements à faibles nombres de Prandtl

La stabilité linéaire 3D indique qu'aux faibles nombres de Prandtl, le champ stationnaire est instable vis-à-vis de perturbations de mode 2. L'instabilité est symétrique pour $Pr \in [0.047, 0.085]$ et antisymétrique pour $Pr \in [0.001, 0.047 \cup]0.085, 0.4]$. Nous avons calculé les écoulements à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$, à $Pr = 0.06$ et $Ma = 400$ et à $Pr = 0.2$ et $Ma = 4000$. Le premier et le troisième sont instables via une perturbation de mode 2 antisymétrique, et le second est instable via une perturbation de mode 2 symétrique.

Le cœur des cellules de ces trois écoulements a été représenté sur la figure 4.1 à la manière de Levenstam et Amberg [66]. Le cœur est le lieu de l'écoulement possédant une vitesse nulle dans le plan azimutal. A $Pr = 0.01$ et à $Pr = 0.2$, les cœurs de la partie supérieure et de la partie inférieure de la zone-flottante sont décalés de $\pi/2$. A $Pr = 0.06$, les cœurs de la partie supérieure et de la partie inférieure de la zone-flottante sont en phase et symétriques par rapport au plan médian. L'écoulement à $Pr = 0.06$ a la symétrie de sa perturbation par rapport au plan médian, contrairement aux écoulements à $Pr = 0.01$ et à $Pr = 0.2$ qui ont perdu toute symétrie par rapport au plan médian, vu l'antisymétrie de leur perturbation. Lorsque la perturbation est antisymétrique, la vitesse axiale de la perturbation est symétrique, ce qui déplace le cœur des cellules dans la même direction.

L'écoulement 3D présenté à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$ n'est pas stable. Après une phase de stabilisation, observable sur l'historique d'une composante du mode 2 entre 700 et 1200 temps thermique sur la figure 4.2, il s'est déstabilisé via une bifurcation fourche. L'état stationnaire vers lequel il se stabilise après 2000 temps thermique, présenté sur la figure 4.3, n'est plus symétrique ou antisymétrique par rapport au plan médian. Le cœur de la partie inférieure est plus aplati que celui de la cellule supérieure. L'écoulement 3D présenté à $Pr = 0.06$ et $Ma = 400$ est lui aussi instable et se déstabilise via une bifurcation stationnaire, néanmoins le taux de croissance de la perturbation est trop faible pour que l'écoulement puisse se stabiliser en un temps raisonnable.

4.4 Écoulements à grands nombres de Prandtl

Aux grands nombres de Prandtl, l'écoulement se déstabilise par une bifurcation de Hopf de mode 1. A $Pr = 100$, le seuil vaut $Ma_c = 31647$ et la pulsation critique $\omega_c = 91.3$. La période de l'écoulement oscillant établi à $Ma = 35000$ est $\omega = 89.7$. Contrairement à l'écoulement bidimensionnel oscillant à $Pr = 20$ (*c.f.* section 3.2.2.7) qui a une pulsation plus élevée que la pulsation critique, l'écoulement 3D ici a une pulsation plus faible que la pulsation critique.

Le tracé de la température le long d'un périmètre dans un diagramme spatio-temporel permet de mettre en évidence la présence d'une onde stationnaire ou d'une onde tournante. Un tel diagramme est présenté sur la figure 4.4. Les nœuds et ventres ont une abscisse fixe, indiquant la présence d'une onde stationnaire.

La température dans une coupe axiale est reproduite sur la figure 4.5. Les isothermes sont des cercles concentriques dont les plus petits semblent se déplacer de manière solide. On remarque une similitude avec le champ de vitesse de la perturbation de mode 1 à $Pr = 100$, représenté sur la figure

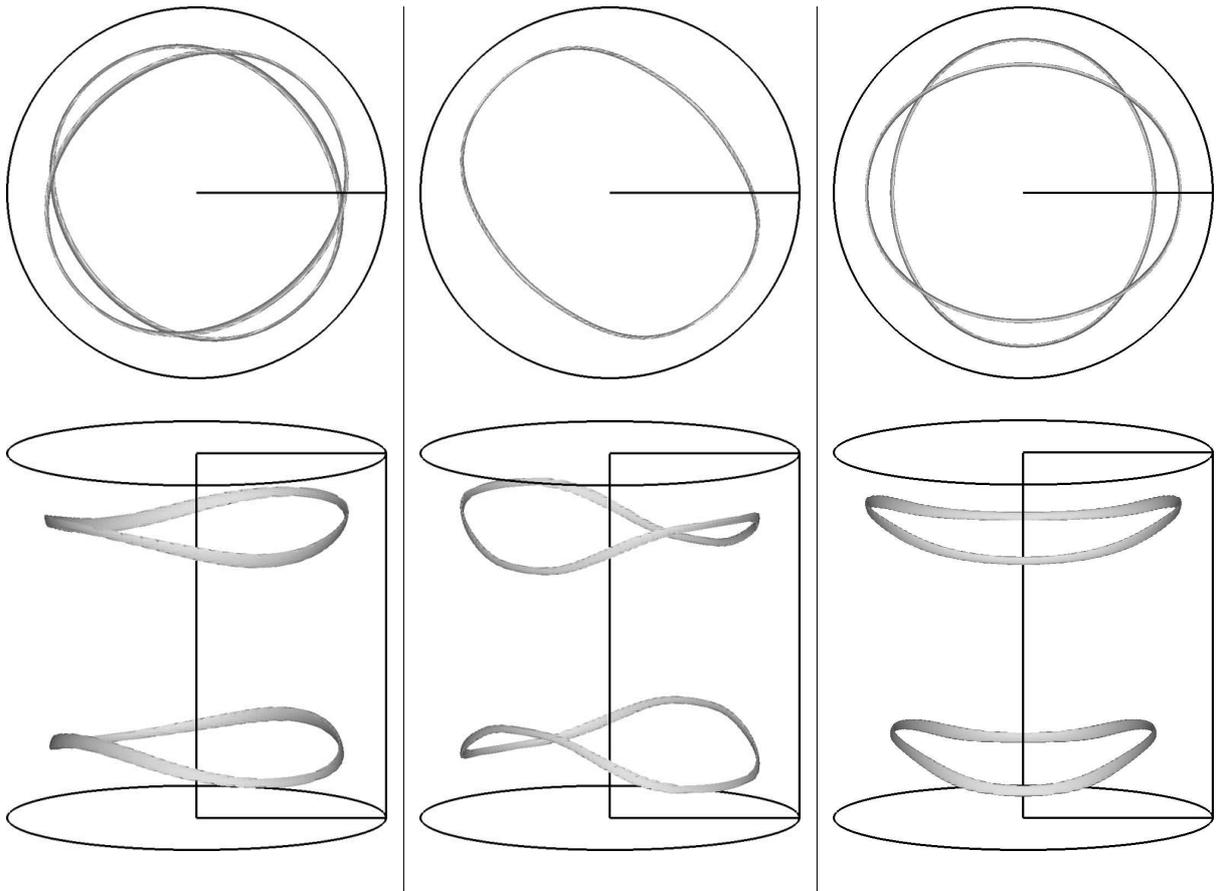


FIG. 4.1 – Cœur des cellules des écoulements à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$ (à gauche), à $Pr = 0.06$ et $Ma = 400$ (au centre) et à $Pr = 0.2$ et $Ma = 4000$ (à droite)

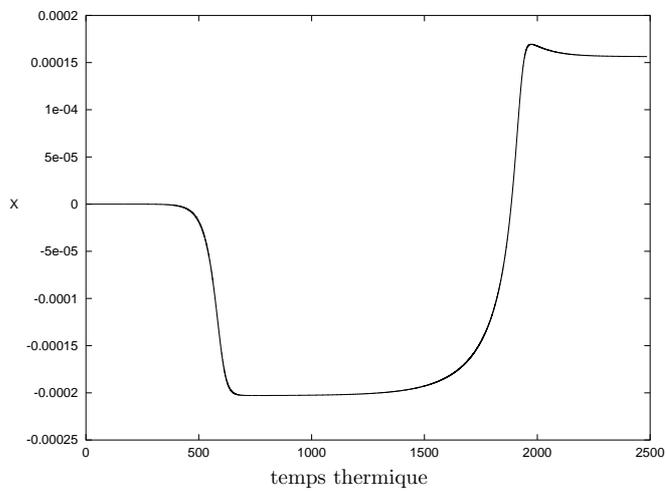


FIG. 4.2 – Historique d'une composante du mode 2 de l'écoulement 3D non linéaire à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$

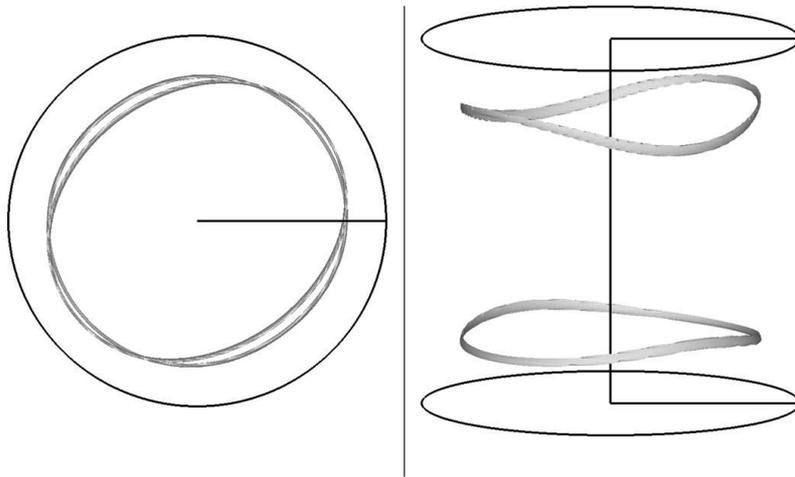


FIG. 4.3 – Cœur des cellules de l'écoulement 3D bifurqué à $Pr = 0.01$ et $Ma = 16$

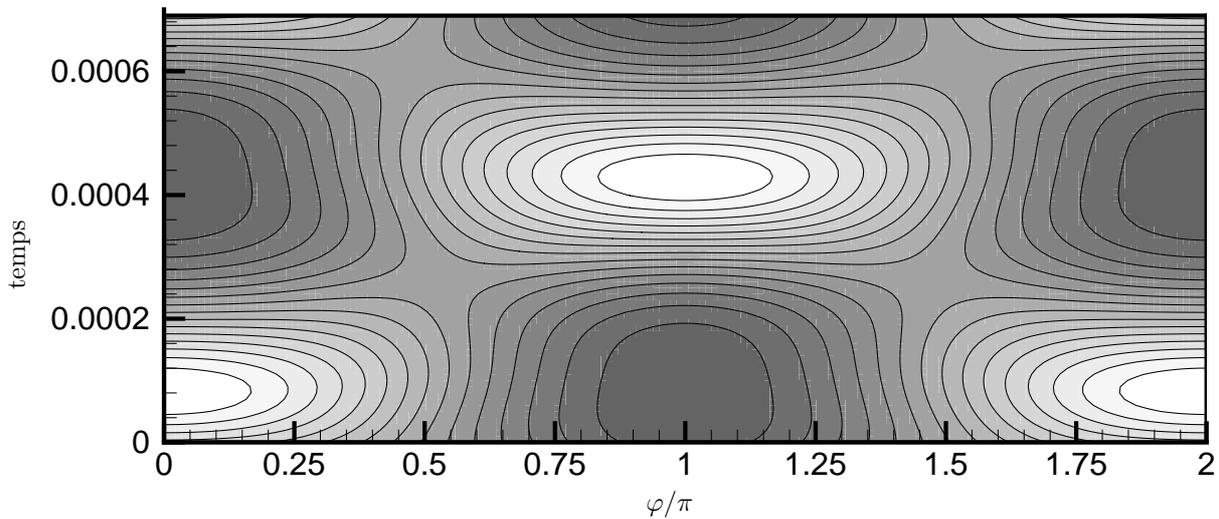


FIG. 4.4 – Diagramme spatio-temporel de la température sur un périmètre de la surface libre en $z = 0.5$. $Pr = 100$ et $Ma = 35000$

4.6, où la vitesse vectorielle de la perturbation est quasi-constante sur une zone centrée sur l'axe. L'écoulement étant convectif, la température est affectée par ce champ de vitesse de la perturbation qui paraît avoir donné sa structure à l'écoulement stationnaire oscillant établi. C'est ce que l'on observe sur la seconde partie de la figure 4.6, à quelques différences près dues, d'une part, aux non-linéarités et, d'autre part, à la présence d'autres modes que le mode 1 dans l'écoulement non-linéaire.

L'écoulement observé à haut Pr en demi-zone est oscillant, aussi bien dans des expérimentations conduites par Muehlner *et al.* [76] et Preisser *et al.* [84] que les simulations de Leypoldt *et al.* [68] et Shevtsova *et al.* [96]. Cette oscillation était d'abord provoquée par une onde stationnaire qui a subi une transition vers une onde tournante progressive. Il faudrait, dans notre cas, laisser le calcul se prolonger jusqu'à l'éventuelle apparition d'une onde tournante.

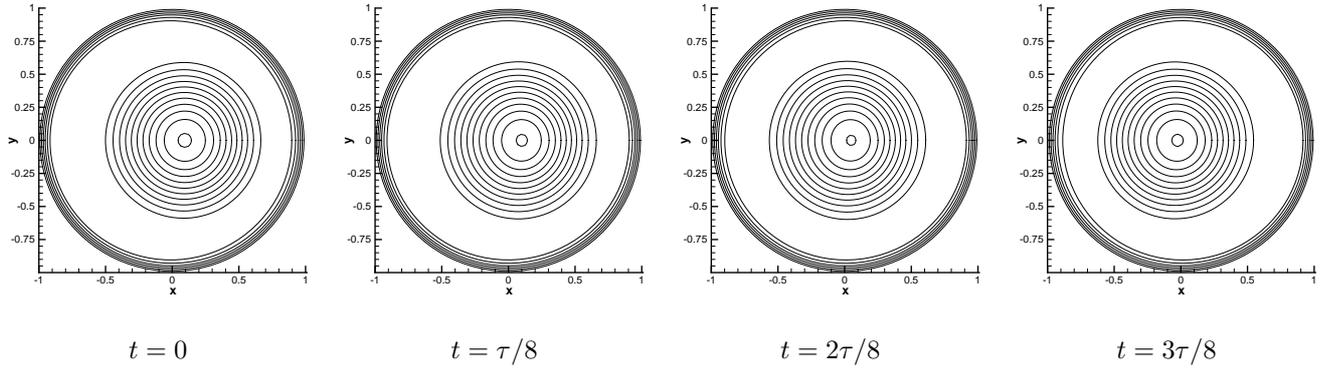


FIG. 4.5 – Température dans la coupe axiale en $z = 0.5$ de la zone-flottante de période τ à $Pr = 100$ et $Ma = 35000$ aux instants $0, \tau/8, 2\tau/8$ et $3\tau/8$. Les isothermes sont équidistants et constants d'une figure à l'autre

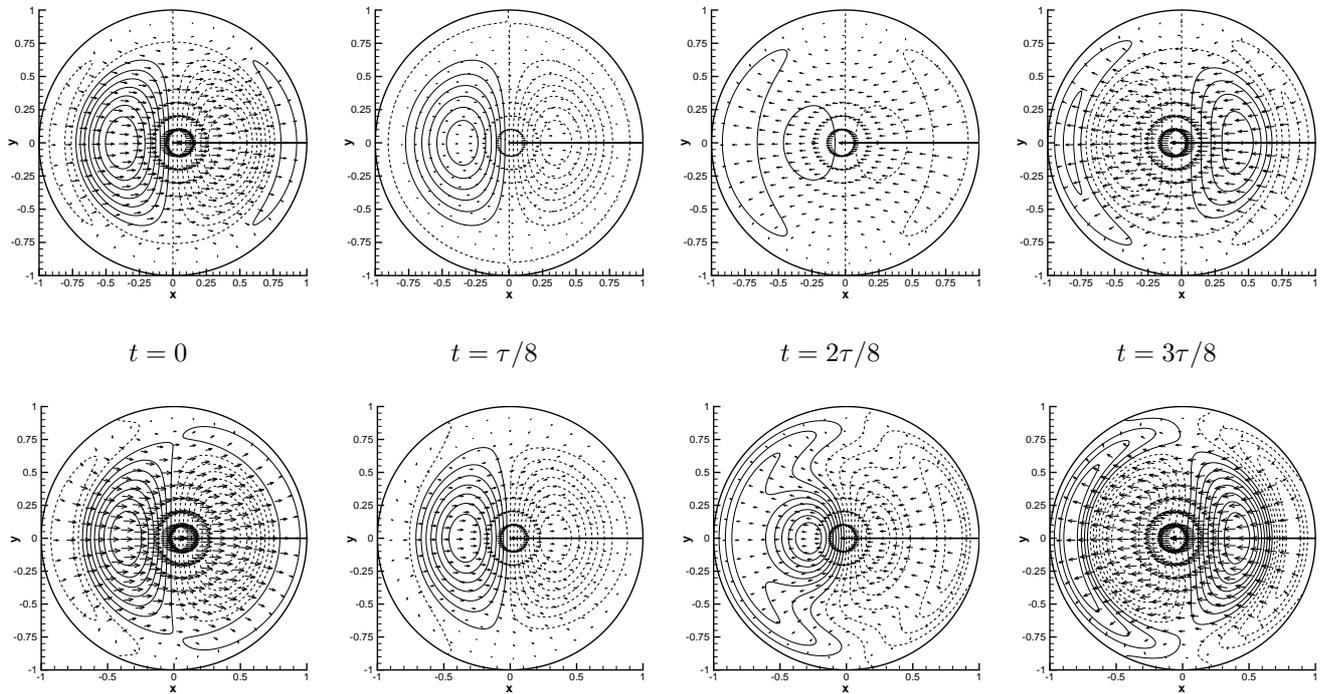


FIG. 4.6 – Température et vitesse dans la coupe axiale en $z = 0.5$ de la zone-flottante de période τ à $Pr = 100$ aux instants $0, \tau/8, 2\tau/8$ et $3\tau/8$ pour la perturbation à $Ma = 31600$ (en haut) et pour l'écoulement 3D sans la contribution axisymétrique à $Ma = 35000$ (en bas)

Chapitre 5

Localisation des lieux sensibles de l'écoulement par le système adjoint

Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilité de la zone-flottante par la méthode dite de l'adjoint. Le système adjoint des équations linéarisées autour de l'état stationnaire y est utilisé pour déterminer les zones les plus sensibles aux perturbations d'un écoulement thermocapillaire en pont liquide.

5.1 Historique

Tous les modèles dépendent de paramètres fixes ou variables. Les modèles d'atmosphère pour les prévisions climatiques ont, entre autres, comme paramètres le taux de CO_2 , le maillage sur lequel la solution du problème est représentée et les paramètres du modèle de sous maille. Il est important, pour des raisons de confiance dans les prévisions, de connaître la sensibilité des résultats soit aux conditions initiales, soit aux paramètres intrinsèques du modèle (maillage ou modèle de sous maille), ceci pour répondre aux questions telles que : doit-on augmenter la précision des mesures ou bien raffiner le maillage dans certaines régions [41, 105, 85]? La méthode de l'adjoint permet de répondre à ces questions. Connaissant un modèle d'atmosphère, il s'agit d'ajuster les paramètres du modèle de manière à minimiser la fonctionnelle qui donne l'écart entre une succession de données observées et celles obtenues par le modèle. La minimisation de la fonctionnelle se fait en calculant son gradient. Ce dernier s'obtient de deux manières : d'une part si les données ont N composantes, on perturbe successivement chacune des composantes pour lesquelles on calcule la fonctionnelle et de ce fait on obtient le jacobien du système ; d'autre part, par la méthode de l'adjoint qui est aussi complexe que le modèle de départ mais permet d'obtenir en une étape (contre N) le jacobien. La méthode de l'adjoint est également utilisée dans les processus d'assimilation qui consistent à compléter des données observationnelles manquantes par celles obtenues grâce à un modèle en minimisant une fonctionnelle qui mesure l'écart entre les données observées et celles fournies par ledit modèle [64]. Ce processus est censé être plus précis que l'interpolation de données car il permet de prendre en compte la dynamique du système à travers un modèle. D'après Cacuci [10], l'adjoint aurait déjà été utilisé pour déterminer la sensibilité de modèles en physique nucléaire à l'époque du développement des piles nucléaires. Un autre champ d'application de l'adjoint concerne l'optimisation de forme, toujours avec la minimisation d'une fonctionnelle, en particulier pour les ailes d'avion [36, 37].

Hill [42] utilise d'une manière différente le système adjoint des équations linéarisées autour de l'état stationnaire. En calculant les modes propres du système adjoint, il localise la source des instabilités dans les problèmes de couches proches parois. Luchini et Bottaro [70] ont développé cette méthode pour les instabilités de Görtler non locales et pour l'analyse des couches de Stokes [71]. Ces études ont été effectuées en configuration de systèmes faiblement ouverts. Gadoin et Le Quéré [34] et Gadoin *et al.* [35] ont appliqué cette méthode pour des écoulements confinés dans une enceinte. La signification physique de l'adjoint a été abordée par Giles et Pierce [37] et éfleuée par Hill [42] dans le cas des équations de Navier-Stokes en les reliant aux fonctions de Green du système.

5.2 Comparer deux perturbations

Nous considérons ici \mathcal{U}_0 un champ stationnaire 2D axisymétrique solution de $L(\mathcal{U}) = 0$, \mathfrak{u} une perturbation linéaire de ce champ solution de $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = \mathcal{L}(\mathcal{U}_0, \mathfrak{u})$ et $(\lambda_i, \mathfrak{u}_i)$ les modes propres de l'opérateur $\mathcal{L}(\mathcal{U}_0, \bullet)$. Les valeurs propres λ_i sont supposées ordonnées par parties réelles décroissantes puis par parties imaginaires décroissantes et deux à deux distinctes :

$$\forall i \in \mathbb{N}_+^*, \quad \forall j \in \mathbb{N}_+^*, \quad \{i \geq j\} \quad \Rightarrow \quad \{\Re(\lambda_i) \geq \Re(\lambda_j)\} \quad (5.1)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_+^*, \quad \forall j \in \mathbb{N}_+^*, \quad \{i \geq j, \quad \Re(\lambda_i) = \Re(\lambda_j)\} \quad \Rightarrow \quad \{\Im(\lambda_i) \geq \Im(\lambda_j)\} \quad (5.2)$$

Supposons que la famille (\mathfrak{u}_i) forme une base de l'espace de Hilbert $\mathcal{E}_{\mathcal{U}_0}$ des perturbations linéaires du champ stationnaire \mathcal{U}_0 . Nous pouvons alors décomposer \mathfrak{u} sur cette base :

$$\mathfrak{u}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \exp(\lambda_i t) \mathfrak{u}_i \quad (5.3)$$

Supposons λ_1 réel.

Au bout d'un temps assez long ($t > T$), nous avons :

$$\mathfrak{u}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a_1 \exp(\lambda_1 t) \mathfrak{u}_1 \quad (5.4)$$

Pour un même champ stationnaire \mathcal{U}_0 , la comparaison, au bout d'un temps long, de deux perturbations $\mathfrak{u}^{(1)}$ et $\mathfrak{u}^{(2)}$ porte sur le coefficient du premier mode propre dans la décomposition dans la base propre de l'opérateur $\mathcal{L}(\mathcal{U}_0, \bullet)$.

Si $\left| a_1^{(1)} \right| > \left| a_1^{(2)} \right|$, alors la perturbation \mathfrak{u}_1 est plus importante au bout d'un temps long que la perturbation \mathfrak{u}_2 .

Par temps T assez long nous pensons que nous devons avoir : $\exp((\lambda_2 - \lambda_1)T) \ll 1$.

Supposons λ_1 complexe.

Dans ce cas, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, et $\mathfrak{u}_2 = \bar{\mathfrak{u}}_1$. Dans ce cas λ peut se décomposer en $\lambda = \sigma + i\omega$, σ et ω étant réels. Décomposons également \mathfrak{u}_1 en $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_1^r + i\mathfrak{u}_1^i$, \mathfrak{u}_1^r et \mathfrak{u}_1^i ont des composantes réelles.

Le champ perturbé \mathfrak{u} est réel, donc les coefficients a_1 et a_2 de la décomposition de \mathfrak{u} dans la base $(\lambda_i, \mathfrak{u}_i)$ sont complexes conjugués : $a_2 = \bar{a}_1$. Nous décomposons aussi a_1 en $a_1 = a_1^r + ia_1^i$.

Au bout d'un temps assez long (*c.f.* cas réel), nous avons :

$$\mathfrak{u}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \exp(\sigma_1 t) \left[(a_1^r \mathfrak{u}_1^r - a_1^i \mathfrak{u}_1^i) \cos(\omega_1 t) - (a_1^r \mathfrak{u}_1^i + a_1^i \mathfrak{u}_1^r) \sin(\omega_1 t) \right] \quad (5.5)$$

Arrangeons le terme de droite dans l'expression (5.5) pour la seule composante u_1 de \mathbf{u}_1 :

$$\begin{aligned}
 & 2 \exp(\sigma_1 t) \left[(a_1^r u_1^r(r, z) - a_1^i u_1^i(r, z)) \cos(\omega_1 t) - (a_1^r u_1^i(r, z) + a_1^i u_1^r(r, z)) \sin(\omega_1 t) \right] \\
 = & 2 \exp(\sigma_1 t) \left[a_1^r (u_1^r(r, z) \cos(\omega_1 t) - u_1^i(r, z) \sin(\omega_1 t)) - a_1^i (u_1^r(r, z) \sin(\omega_1 t) + u_1^i(r, z) \cos(\omega_1 t)) \right] \\
 = & 2 \exp(\sigma_1 t) \sqrt{u_1^{r2}(r, z) + u_1^{i2}(r, z)} \\
 & \left[a_1^r (\cos \alpha_1(r, z) \cos(\omega_1 t) - \sin \alpha_1(r, z) \sin(\omega_1 t)) + a_1^i (\cos \alpha_1(r, z) \sin(\omega_1 t) + \sin \alpha_1(r, z) \cos(\omega_1 t)) \right] \\
 = & 2 \exp(\sigma_1 t) \sqrt{u_1^{r2}(r, z) + u_1^{i2}(r, z)} \left[a_1^r \cos(\omega_1 t + \alpha_1(r, z)) + a_1^i \sin(\omega_1 t + \alpha_1(r, z)) \right] \\
 = & 2 \exp(\sigma_1 t) \sqrt{u_1^{r2}(r, z) + u_1^{i2}(r, z)} \sqrt{a_1^{r2} + a_1^{i2}} [\cos \beta_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1(r, z)) + \sin \beta_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1(r, z))] \\
 = & 2 \exp(\sigma_1 t) \sqrt{u_1^{r2}(r, z) + u_1^{i2}(r, z)} \sqrt{a_1^{r2} + a_1^{i2}} \cos(\omega_1 t + \alpha_1(r, z) + \beta_1)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Il en va de même pour les autres composantes de \mathbf{u}_1 . Sachant que \mathbf{u}_1 est constant et que le terme $\cos(\omega_1 t + \alpha_1(r, z) + \beta_1)$ est borné, le seul terme permettant de comparer deux perturbations est le module de a_1 , c'est à dire $\sqrt{a_1^{r2} + a_1^{i2}}$.

Pour comparer deux perturbations oscillantes $\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(2)}$ du même champ stationnaire \mathbb{U}_0 , nous comparons le module du coefficient du premier mode propre dans la décomposition dans la base propre de l'opérateur $\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \bullet)$, c'est à dire $|a_1^{(1)}|$ et $|a_1^{(2)}|$.

Si $|a_1^{(1)}| > |a_1^{(2)}|$, alors la perturbation \mathbf{u}_1 est plus importante au bout d'un temps long que la perturbation \mathbf{u}_2 .

5.3 Décomposition dans la base propre

Pour obtenir la décomposition (a_i) d'une perturbation \mathbf{u} dans la base propre (\mathbf{u}_i) de l'opérateur $\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ on cherche une famille d'applications linéaires $(\tilde{\mathbf{u}}_i)$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad (\mathbf{u}_i | \tilde{\mathbf{u}}_j) = \delta_{ij} \tag{5.7}$$

La famille $(\tilde{\mathbf{u}}_i)$ appartient à l'espace dual $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{U}_0}$ de $\mathcal{E}_{\mathbb{U}_0}$. Le produit scalaire $(\bullet | \bullet)$ est celui défini sur \mathcal{E} .

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{U}_0} \subset \mathcal{E} \tag{5.8}$$

Une manière naturelle d'obtenir une famille bi-orthogonale à la base propre (\mathbf{u}_i) de l'opérateur $\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ est de calculer la base propre de l'opérateur adjoint de $\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \bullet)$. L'opérateur adjoint de $\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ est l'opérateur noté $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ défini par :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{E}_{\mathbb{U}_0}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{U}_0}, \quad (\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \mathbf{u}) | \tilde{\mathbf{u}}) = \left(\mathbf{u} | \tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{U}_0, \tilde{\mathbf{u}}) \right) \tag{5.9}$$

La famille $(\tilde{\mathbf{u}}_i)$ est constituée des modes propres de l'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ [89]. Les valeurs propres de $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ sont égales aux complexes conjugués de celles de $\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \bullet)$

Deux méthodologies sont à notre disposition, comme le suggèrent Giles et Pierce [37], pour obtenir $\tilde{\mathbf{u}}_1$. Rappelons que nous désirons obtenir $\tilde{\mathbf{u}}_1$ par une méthode numérique, donc avoir une valeur approchée de $\tilde{\mathbf{u}}_1$.

Une première méthode, l'approche discrète, serait de considérer d'emblée que l'opérateur $\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ est pris sous sa forme discrétisée. Nous devons alors considérer un produit scalaire discret et calculer l'adjoint de l'opérateur discret. L'avantage est d'obtenir l'opérateur adjoint discret du système direct discret, et donc les vecteurs propres adjoints discrets sans passer par la projection dans un espace

de dimension plus petite que le continu. L'inconvénient est de construire cet opérateur ; les maillages ayant de plus en plus de noeuds, la mémoire des machines actuelles est le facteur limitant. A titre indicatif, en méthode pseudospectrale de collocation, pour un champ dont la grille a une taille de 100×150 , l'opérateur direct $\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ a une taille de $3 \times (100 \times 150)^2$. Ce qui donne pour des données stockées sur 32bits une taille mémoire de 2.5Go pour le seul opérateur direct. Il reste à construire l'opérateur adjoint et à trouver ses modes propres. Nous n'utiliserons pas cette approche.

La seconde méthode, l'approche continue, consiste à obtenir l'adjoint du système continu et à le discrétiser pour approcher les modes propres adjoints. Les avantages d'un tel procédé sont, comme le suggèrent Giles et Pierce [37], la petite quantité de mémoire utilisée et la simplicité de la programmation. L'inconvénient est que, contrairement à l'approche discrète, nous n'obtenons pas exactement les modes propres discrets adjoints aux modes discrets du système direct.

5.4 Calcul du système adjoint analytique

Nous cherchons l'opérateur $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ tel que :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{E}_{\mathbb{U}_0}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{U}_0}, \quad (\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \mathbf{u}) | \tilde{\mathbf{u}}) = \left(\mathbf{u} \left| \widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{U}_0, \tilde{\mathbf{u}}) \right. \right) \quad (5.10)$$

Rappelons que, en deux dimensions :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) U_0 - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) u - \frac{\partial p}{\partial r} + Pr \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) & (5.11a) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) W_0 - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) w - \frac{\partial p}{\partial z} + Pr \Delta w & (5.11b) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0 - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \theta + \Delta \theta & (5.11c) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 & (5.11d) \end{cases}$$

Avec pour conditions aux limites :

$$z = \pm \frac{A}{2} \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} & (5.12a) \\ \theta = 0 & (5.12b) \end{cases} \quad r = 1 \begin{cases} u = 0 & (5.13a) \\ \frac{\partial w}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial z} f_n(z) & (5.13b) \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 & (5.13c) \end{cases}$$

Les expressions (5.11), (5.12) et (5.13) s'écrivent de manière plus synthétique :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\mathbb{U}_0} = \mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \mathbf{u}) \quad (5.14)$$

Commençons le calcul de l'adjoint en développant le terme de gauche dans l'expression (5.10) :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \mathbf{u}) | \tilde{\mathbf{u}}) &= \int \int_{\mathcal{D}} \left[\left(-(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) U_0 - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) u - \frac{\partial p}{\partial r} + Pr \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) \right) \tilde{u} \right. \\ &\quad + \left(-(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) W_0 - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) w - \frac{\partial p}{\partial z} + Pr \Delta w \right) \tilde{w} \\ &\quad + \left(-(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0 - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \theta + \Delta \theta \right) \tilde{\theta} \\ &\quad \left. - (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \tilde{p} \right] r dr dz \end{aligned} \quad (5.15)$$

\tilde{p} n'est pas une variable adjointe en soi car, comme dans le système direct, p est une variable intrinsèque : p n'est là que pour assurer $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Pour cette raison, nous avons introduit l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ dans le produit scalaire, qui lie p à u .

Ceci nous donne, après intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \mathbf{u}) | \tilde{\mathbf{u}}) &= \int \int_{\mathcal{D}} \left[\left((\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \tilde{u} - \tilde{u} \frac{\partial U_0}{\partial r} - \tilde{w} \frac{\partial W_0}{\partial r} - \tilde{\theta} \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + Pr \left(\Delta \tilde{u} - \frac{\tilde{u}}{r^2} \right) \right) u \right. \\
 &\quad + \left((\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \tilde{w} - \tilde{u} \frac{\partial U_0}{\partial z} - \tilde{w} \frac{\partial W_0}{\partial z} - \tilde{\theta} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + Pr \Delta \tilde{w} \right) w \\
 &\quad + \left((\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\theta} + \Delta \tilde{\theta} \right) \theta \\
 &\quad \left. + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} \right) p \right] r dr dz \\
 &\quad - \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{J} \cdot \vec{n} \, d\sigma
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

avec \vec{n} la normale extérieure à $\partial \mathcal{D}$, frontière du domaine \mathcal{D} , et $\vec{J} = J_r \vec{e}_r + J_z \vec{e}_z$ dont les composantes sont :

$$\begin{aligned}
 J_r &= U_0 \left(u \tilde{u} + w \tilde{w} + \theta \tilde{\theta} \right) + u \tilde{p} + \tilde{u} p \\
 &\quad + Pr \left(u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + Pr \left(w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \tilde{w} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \theta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} - \tilde{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
 J_z &= W_0 \left(u \tilde{u} + w \tilde{w} + \theta \tilde{\theta} \right) + w \tilde{p} + \tilde{w} p \\
 &\quad + Pr \left(u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + Pr \left(w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \tilde{w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \theta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} - \tilde{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Le champ stationnaire \mathbb{U}_0 et la perturbation \mathbf{u} vérifient sur la frontière $\partial \mathcal{D}$ les relations :

$r = 0$	$r = 1$	$z = \pm A/2$
$U_0 = 0$		
$\frac{\partial W_0}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial W_0}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} f_n(z)$	$W_0 = 0$
$\frac{\partial \Theta_0}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial \Theta_0}{\partial r} = Q(z)$	$\Theta_0 = 0$
$u = 0$		
$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial z} f_n(z)$	$w = 0$
$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$		$\theta = 0$

(5.19)

Donc \vec{J} devient, en remplaçant dans (5.17) les termes exprimés en (5.19), sur $\partial\mathcal{D}$:

$$J_r = Pr \left(-\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \tilde{w} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \theta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} + \tilde{u} p \quad (5.20)$$

$$J_z = -Pr \left(\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \tilde{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + w \tilde{p} + \tilde{w} p \quad (5.21)$$

Les conditions aux limites du système adjoint sont fournies par $\int_{\partial\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$. Ceci donne direction par direction :

En $r=0$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left[Pr \left(-\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \tilde{w} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \theta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} + \tilde{u} p \right] dz \\ &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left[\tilde{u} \left(-Pr \frac{\partial u}{\partial r} + p \right) + Pr w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \theta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} \right] dz \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Donc pour que cette expression soit vérifiée, il suffit que, pour $r = 0$:

$$\tilde{u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} = 0 \quad (5.23)$$

En $r=1$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left[Pr \left(-\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - \tilde{w} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \theta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} + \tilde{u} p \right] dz \\ &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left[\tilde{u} \left(-Pr \frac{\partial u}{\partial r} + p \right) + Pr w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + Pr Ma f_n(z) \tilde{w} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \theta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} \right] dz \\ &= \underbrace{[\theta \tilde{w} Pr Ma f_n(z)]_{z=-A/2}^{z=A/2}}_{=0} + \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left[\tilde{u} \left(-Pr \frac{\partial u}{\partial r} + p \right) + Pr w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} - Pr Ma \theta \frac{\partial \tilde{w} f_n(z)}{\partial z} + \theta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} \right] dz \\ &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left[\tilde{u} \left(-Pr \frac{\partial u}{\partial r} + p \right) + Pr w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \theta \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} - Pr Ma \frac{\partial \tilde{w} f_n(z)}{\partial z} \right) \right] dz \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Donc pour que cette expression soit vérifiée, il suffit que, pour $r = 1$:

$$\tilde{u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} = Pr Ma \frac{\partial \tilde{w} f_n(z)}{\partial z} \quad (5.25)$$

En $z=\pm A/2$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[-Pr \left(\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \tilde{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + w \tilde{p} + \tilde{w} p \right] dr \\ &= \int_0^1 \left[-Pr \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial z} + \tilde{w} \left(-Pr \frac{\partial w}{\partial z} + p \right) - \tilde{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dr \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Donc pour que cette expression soit vérifiée, il suffit que, pour $z = \pm A/2$:

$$\tilde{u} = 0 \quad , \quad \tilde{w} = 0 \quad , \quad \tilde{\theta} = 0 \quad (5.27)$$

Finalement l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{L}(\mathbb{U}_0, \bullet)$ est :

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{U}_0, \mathfrak{u}) = \begin{cases} (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \tilde{u} - \tilde{u} \frac{\partial U_0}{\partial r} - \tilde{w} \frac{\partial W_0}{\partial r} - \tilde{\theta} \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + Pr \left(\Delta \tilde{u} - \frac{\tilde{u}}{r^2} \right) \\ (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \tilde{w} - \tilde{u} \frac{\partial U_0}{\partial z} - \tilde{w} \frac{\partial W_0}{\partial z} - \tilde{\theta} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + Pr \Delta \tilde{w} \\ (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\theta} + \Delta \tilde{\theta} \end{cases} \quad (5.28)$$

avec

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} = 0 \quad (5.29)$$

et pour conditions aux limites

$$z = \pm \frac{A}{2} \begin{cases} \vec{\tilde{u}} = \vec{0} \\ \tilde{\theta} = 0 \end{cases} \quad r = 1 \begin{cases} \tilde{u} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} = PrMa \frac{\partial \tilde{w} f_n(z)}{\partial z} \end{cases} \quad (5.30)$$

5.4.1 "Adjoint" de $\left. \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} \right|_{\mathbb{U}_0}$

Nous cherchons l'équation d'évolution temporelle du mode adjoint. Procédons par intégration par partie sur le temps :

$$\left. \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} \right|_{\mathbb{U}_0} \tilde{\mathfrak{u}} = \left. \frac{\partial \mathfrak{u} \tilde{\mathfrak{u}}}{\partial t} \right|_{\mathbb{U}_0} - \mathfrak{u} \left. \frac{\partial \tilde{\mathfrak{u}}}{\partial t} \right|_{\mathbb{U}_0} \quad (5.31)$$

Ce qui nous permet de définir l'évolution temporelle du système adjoint dans la suite.

5.4.2 Système adjoint

L'adjoint de l'opérateur $\mathcal{L}(\mathbf{U}_0, \bullet)$ est défini par :

$$-\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{U}_0} = \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{u}) \quad (5.32)$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \tilde{u} + \tilde{u} \frac{\partial U_0}{\partial r} + \tilde{w} \frac{\partial W_0}{\partial r} + \tilde{\theta} \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + Pr \left(\Delta \tilde{u} - \frac{\tilde{u}}{r^2} \right) \\ -\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \tilde{w} + \tilde{u} \frac{\partial U_0}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial W_0}{\partial z} + \tilde{\theta} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + Pr \Delta \tilde{w} \\ -\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\theta} = \Delta \tilde{\theta} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} = 0 \end{array} \right. \quad (5.33)$$

avec pour conditions aux limites

$$z = \pm \frac{A}{2} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\tilde{u}} = \vec{0} \\ \tilde{\theta} = 0 \end{array} \right. \quad r = 1 \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} = Pr Ma \frac{\partial \tilde{w} f_n(z)}{\partial z} \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Avec cette définition, les modes propres $\tilde{\mathbf{u}}_i$ de $\tilde{\mathcal{L}}$ vérifient $\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial t} \right|_{\mathbf{U}_0} = -\lambda_i \tilde{\mathbf{u}}_i$. En supposant que tout élément $\tilde{\mathbf{u}}$ de l'espace dual se décompose dans la base propre de l'espace dual selon : $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{a}_i \exp(-\lambda_i t) \tilde{\mathbf{u}}_i$. Ceci implique que :

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{D}} \left. \frac{\partial \mathbf{u} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{U}_0} r dr dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{u}_i e^{\lambda_i t} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j \tilde{\mathbf{u}}_j e^{-\lambda_j t} \right) r dr dz \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j} a_i \tilde{a}_j \mathbf{u}_i \tilde{\mathbf{u}}_j e^{(\lambda_i - \lambda_j)t} r dr dz = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j} a_i \tilde{a}_j e^{(\lambda_i - \lambda_j)t} \int \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}_i \tilde{\mathbf{u}}_j r dr dz \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j} a_i \tilde{a}_j e^{(\lambda_i - \lambda_j)t} \delta_{i,j} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_i a_i \tilde{a}_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce terme à intégrale spatiale nulle sur le domaine \mathcal{D} n'intervient donc pas dans l'évaluation du système adjoint.

Il ne nous reste plus qu'à calculer les valeurs et modes propres de l'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{u})$ par une méthode du type puissance itérée. Nous utiliserons la méthode d'Arnoldi dont nous nous sommes déjà servis pour calculer les valeurs et modes propres de $\mathcal{L}(\mathbf{U}_0, \mathbf{u})$. Le système adjoint (5.32) est composé d'une partie antidiffusive, donc instable. Ce sont les modes propres de l'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}$ qui nous intéressent, pour les calculer avec une méthode itérée il suffit de changer le signe du temps pour avoir un terme diffusif, donc stable, et pouvoir obtenir les modes propres avec une méthode itérative.

5.5 Evaluation de la contribution du premier mode propre

Supposons connus le champ stationnaire \mathcal{U}_0 et le premier mode propre adjoint \tilde{u}_1 . Considérons une perturbation linéaire \mathfrak{u} du champ stationnaire. Au temps $t = 0$ nous avons $\mathfrak{u}(t = 0) = \delta\mathfrak{u} = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \mathfrak{u}_i$.

Pour connaître a_1 , correspondant à \mathfrak{u} , il suffit de faire le produit scalaire de $\delta\mathfrak{u}$ par \tilde{u}_1 :

$$a_1 = (\delta\mathfrak{u}|\tilde{u}_1) = \int \int_{\mathcal{D}} \left(\delta u \tilde{u}_1 + \delta w \tilde{w}_1 + \delta \theta \tilde{\theta}_1 \right) r dr dz \quad (5.35)$$

5.5.1 Perturbation ponctuelle en température

Considérons une perturbation ponctuelle en température et en temps $\delta\mathbb{T} = \delta\mathbb{T}(r_p, z_p)$, et uniquement en température; c'est à dire une vitesse nulle partout sur \mathcal{D} et une température nulle partout sauf en un point (r_p, z_p) du domaine \mathcal{D} où elle vaut ε .

$$\delta\mathbb{T}(r_p, z_p) = \begin{pmatrix} u_{r,z} = 0 \\ w_{r,z} = 0 \\ \theta_{r,z} = \varepsilon \delta(r - r_p) \delta(z - z_p) \end{pmatrix}_{\forall (r,z) \in \overline{\mathcal{D}}} \quad (5.36)$$

Pour cette perturbation, a_1 est égal à :

$$\begin{aligned} a_1 &= (\delta\mathbb{T}(r_p, z_p) | \tilde{u}_1) \\ &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 \varepsilon \delta(r - r_p) \delta(z - z_p) \tilde{\theta}_1 r dr dz \\ &= \varepsilon \tilde{\theta}_1(r_p, z_p) r_p \end{aligned} \quad (5.37)$$

Dans le cas présent, il y a un lien direct entre l'amplitude du champ adjoint et l'amplitude de la réponse à une perturbation impulsionnelle.

5.5.2 Perturbation en vitesse

Considérons une perturbation en vitesse ponctuelle en temps $\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{U}$, et uniquement en vitesse; c'est à dire une température nulle partout sur \mathcal{D} .

$$\delta\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_{r,z} = \delta u \\ w_{r,z} = \delta w \\ \theta_{r,z} = 0 \end{pmatrix}_{\forall (r,z) \in \overline{\mathcal{D}}} \quad (5.38)$$

Pour cette perturbation, a_1 est égal à :

$$\begin{aligned} a_1 &= (\delta\mathcal{U} | \tilde{u}_1) \\ &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 (\delta u \tilde{u}_1 + \delta w \tilde{w}_1) r dr dz \end{aligned} \quad (5.39)$$

Jusque-là, rien de bien nouveau n'a été apporté par rapport à la formule (5.35). Maintenant remplaçons \tilde{u}_1 et \tilde{w}_1 par leurs expressions en fonction de la fonction de courant $\tilde{\psi}_I$ (c.f. annexe B).

$$\tilde{u}_1 = \frac{\partial \tilde{\psi}_I}{\partial z} \quad \tilde{w}_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{\psi}_I}{\partial r} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 (\delta u \tilde{u}_1 + \delta w \tilde{w}_1) r dr dz \\
 &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 \left(\delta u \frac{\partial \tilde{\psi}_I}{\partial z} + \delta w \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial r \tilde{\psi}_I}{\partial r} \right) \right) r dr dz \\
 &= \int_{r=0}^{r=1} \left(\underbrace{\left[r \delta u \tilde{\psi}_I \right]_{z=-A/2}^{z=A/2}}_{=0} - \int_z \tilde{\psi}_I \frac{\partial r \delta u}{\partial z} dz \right) dr - \int_{z=-A/2}^{z=A/2} \left(\underbrace{\left[r \delta w \tilde{\psi}_I \right]_{r=0}^{r=1}}_{=0} - \int_{r=0}^{r=1} r \tilde{\psi}_I \frac{\partial \delta w}{\partial r} dr \right) dz \\
 &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 \left(-\frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right) \tilde{\psi}_I r dr dz \\
 &= - \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 \delta \omega \tilde{\psi}_I r dr dz
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Le calcul de $|a_1|$ d'une perturbation en vitesse s'évalue aussi bien à partir de la perturbation en vitesse et des composantes de vitesse du premier mode propre adjoint que de la fonction de courant $\tilde{\psi}_I$ et du rotationnel de la perturbation. Ceci a comme avantage de disposer de deux visions différentes de la sensibilité du champ stationnaire vis-à-vis d'une perturbation en vitesse. D'une part, on peut ne considérer que les deux composantes de vitesse du premier mode propre adjoint et ainsi voir si l'une est prépondérante sur l'autre. D'autre part, la fonction de courant en tant que champ scalaire est plus facilement utilisable pour localiser les lieux sensibles de l'écoulement à une perturbation en vorticité, qui est également une perturbation en vitesse.

Une perturbation est, dans la plupart des cas, plus facilement concevable lorsqu'elle est ponctuelle. Si $\delta \omega$ est ponctuelle, alors la valeur qui nous intéresse est $\tilde{\psi}_I r$ au point où $\delta \omega$ est non nulle. C'est la fonction $\tilde{\psi}_I r$ qu'il est intéressant alors de visualiser. Or la fonction $\tilde{\psi}_I r$ est égale   $\tilde{\psi}_{II}$, qui est la fonction de courant de Stokes. Finalement, la fonction de courant de l'adjoint que nous représenterons sera obtenue de la même manière que celle de la fonction de courant de l'écoulement de base.

5.6 Discrétisation

Nous considérons   partir de maintenant que toutes les quantités calculées le sont numériquement. Tous les champs dont nous disposerons seront discrets.

Nous nous placons dans le cadre de l'approche discrète des équations différentielles (*c.f.* chapitre 2) sur un espace discret de dimension $N = Nr \times Nz$. Nous utilisons des maillages de 70×100 pour nos séries d'expériences numériques. Nous avons également utilisé des champs sur des maillages allant de 70×100   100×150 pour la validation de l'adjoint vis- -vis du système direct.

Nous supposons que l'évolution d'une perturbation peut être décrite par :

$$\mathbf{u}(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}_0 = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{u}_i e^{\lambda_i t} \tag{5.42}$$

Le premier mode adjoint est calculé de la même manière que le premier mode des équations linéarisées, c'est- -dire par une méthode d'Arnoldi (2.2.4).

Nous désirons connaître, pour une perturbation \mathbf{u} d'un champ stationnaire \mathcal{U}_0 , le premier coefficient a_1 de la décomposition de \mathbf{u} dans la base propre de l'opérateur $\mathcal{L}(\mathcal{U}_0, \bullet)$. Pour cela, nous disposons du mode propre adjoint $\tilde{\mathbf{u}}_1$ avec lequel nous pouvons théoriquement calculer par l'intégrale discrétisée (5.43) (*c.f.* annexe C) le coefficient a_1 , que nous distinguerons dans ce cas par la notation a_1^{num} :

$$a_1^{num} = (\mathbf{u} | \tilde{\mathbf{u}}_1) = \int \int_{\mathcal{D}} \left(u \tilde{u}_1 + w \tilde{w}_1 + \theta \tilde{\theta}_1 \right) r dr dz \tag{5.43}$$

Cette intégrale dépend de l'intégration numérique utilisée et de la grille sur laquelle les variables sont projetées. Cette dépendance sera vue à la section 5.6.4.

Pour vérifier que ce calcul nous donne le "bon" résultat, nous effectuons parallèlement une évaluation du coefficient a_1 à l'aide d'un code temporel linéarisé initialisé avec la même perturbation et nous observons son évolution au bout d'un temps assez long.

Pour des raisons pratiques, car les vecteurs propres sont définis à un facteur près, nous comparons plutôt deux perturbations entre elles, en analysant le quotient de leurs coefficients a_1 respectifs.

Nous ferons, après la validation des équations adjointes, trois séries d'expériences avec des familles de perturbations en température et une série avec une perturbation en vitesse. Les deux premières séries seront faites avec une même famille de perturbations ponctuelles sur une bifurcation stationnaire et sur une bifurcation instationnaire. La troisième série, avec une famille de perturbations non ponctuelle en température en forme de gaussienne, sur une bifurcation stationnaire. Et la dernière, avec une famille de perturbations non ponctuelle en vitesse sur une bifurcation stationnaire.

La figure 5.1 présente, de manière schématique, la démarche adoptée dans ce chapitre.

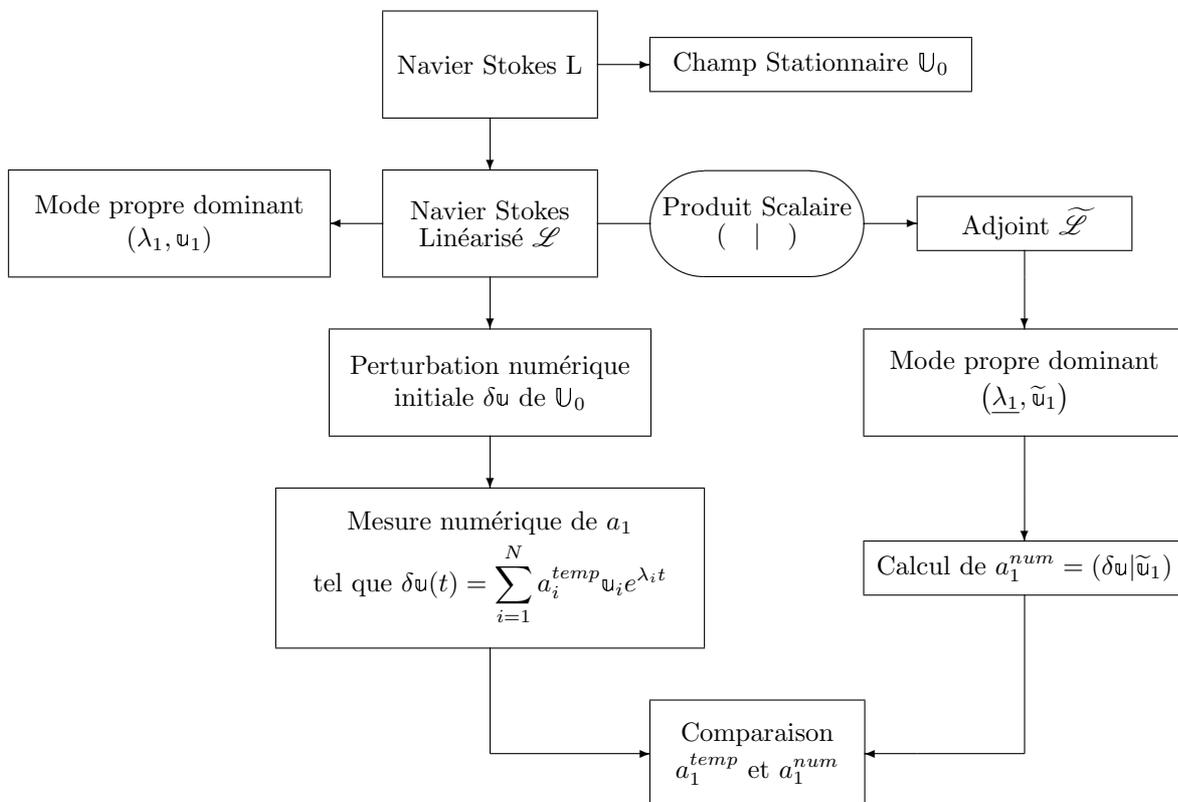


FIG. 5.1 – Schéma de la démarche adoptée dans ce chapitre

5.6.1 Validation

Nous disposons déjà d'une méthode d'Arnoldi (2.2.4) validée sur la stabilité linéaire des champs stationnaires \mathcal{U}_0 . Nous avons remplacé les équations linéarisées de Navier-Stokes par celles du système adjoint. Nous devrions trouver les mêmes valeurs propres (au conjugué près) par les deux programmes pour les mêmes paramètres (Ma , Pr , N_r , N_z , $n = 13$). Nous avons alors calculé les valeurs propres dominantes pour différents nombres de *Prandtl* et de *Marangoni* que nous avons consignées dans le tableau 5.1. Les valeurs propres regroupées par deux à la fin du tableau correspondent à la valeur propre de plus grande partie réelle et la seconde qui, parce qu'elles sont proches, a été calculée avec une précision comparable. La première valeur propre présentée est celle dont la partie réelle devient positive en premier. Nous pouvons constater que l'écart entre les valeurs propres du système direct

(équation de Navier-Stokes linéarisées) et du système adjoint est faible. Nous pouvons dire que les équations du système adjoint sont justes.

Prandtl	Marangoni	Direct $\lambda_d = \sigma_d + i\omega_d$		Adjoint $\lambda_a = \sigma_a + i\omega_a$		δ
		σ_d	ω_d	σ_a	ω_a	
$1.000 \cdot 10^2$	$5.660 \cdot 10^4$	$-1.2190 \cdot 10^{-2}$	$1.2453 \cdot 10^2$	$-1.2295 \cdot 10^{-2}$	$1.2453 \cdot 10^2$	0.9%
$9.000 \cdot 10^1$	$5.670 \cdot 10^4$	$2.9602 \cdot 10^{-3}$	$1.2410 \cdot 10^2$	$2.8743 \cdot 10^{-3}$	$1.2410 \cdot 10^2$	3%
$8.000 \cdot 10^1$	$5.680 \cdot 10^4$	$-3.2563 \cdot 10^{-3}$	$1.2354 \cdot 10^2$	$-3.3690 \cdot 10^{-3}$	$1.2354 \cdot 10^2$	3.5%
$7.000 \cdot 10^1$	$5.700 \cdot 10^4$	$4.1078 \cdot 10^{-2}$	$1.2289 \cdot 10^2$	$4.0935 \cdot 10^{-2}$	$1.2289 \cdot 10^2$	0.5%
$6.000 \cdot 10^1$	$5.720 \cdot 10^4$	$3.3635 \cdot 10^{-2}$	$1.2197 \cdot 10^2$	$3.3521 \cdot 10^{-2}$	$1.2197 \cdot 10^2$	0.4%
$5.000 \cdot 10^1$	$5.750 \cdot 10^4$	$1.8683 \cdot 10^{-2}$	$1.2072 \cdot 10^2$	$1.8630 \cdot 10^{-2}$	$1.2072 \cdot 10^2$	0.3%
$4.000 \cdot 10^1$	$5.805 \cdot 10^4$	$2.6093 \cdot 10^{-2}$	$1.1895 \cdot 10^2$	$2.6004 \cdot 10^{-2}$	$1.1895 \cdot 10^2$	0.2%
$3.000 \cdot 10^1$	$5.900 \cdot 10^4$	$-5.6129 \cdot 10^{-2}$	$1.1609 \cdot 10^2$	$-5.6373 \cdot 10^{-2}$	$1.1609 \cdot 10^2$	0.5%
$2.000 \cdot 10^1$	$6.200 \cdot 10^4$	$-2.0455 \cdot 10^{-2}$	$1.1136 \cdot 10^2$	$-2.0491 \cdot 10^{-2}$	$1.1136 \cdot 10^2$	0.2%
$1.000 \cdot 10^1$	$9.260 \cdot 10^4$	$2.7881 \cdot 10^{-3}$	$1.0866 \cdot 10^2$	$2.8134 \cdot 10^{-3}$	$1.0866 \cdot 10^2$	0.9%
$3.100 \cdot 10^{-2}$	$1.500 \cdot 10^3$	$8.4271 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$8.3692 \cdot 10^{-4}$	0.0000	0.7%
$3.100 \cdot 10^{-2}$	$1.450 \cdot 10^3$	$-3.2432 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$-3.1373 \cdot 10^{-4}$	0.0000	3.5%
$1.200 \cdot 10^{-2}$	$1.000 \cdot 10^2$	$-2.1921 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$-2.1813 \cdot 10^{-3}$	0.0000	0.5%
$1.000 \cdot 10^{-2}$	$1.040 \cdot 10^2$	$-4.7622 \cdot 10^{-5}$	0.0000	$-4.4965 \cdot 10^{-5}$	0.0000	6%
$1.000 \cdot 10^{-2}$	$1.060 \cdot 10^2$	$1.7000 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$1.7010 \cdot 10^{-4}$	0.0000	0.1%
$2.000 \cdot 10^{-3}$	$1.240 \cdot 10^2$	$-1.3064 \cdot 10^{-2}$	8.6504	$-1.4162 \cdot 10^{-2}$	8.6203	8%
$3.000 \cdot 10^{-3}$	$2.250 \cdot 10^2$	$-1.9840 \cdot 10^{-2}$	$1.2896 \cdot 10^1$	$-2.2515 \cdot 10^{-2}$	$1.2893 \cdot 10^1$	13%
$3.000 \cdot 10^{-3}$	$2.250 \cdot 10^2$	$-6.9176 \cdot 10^{-3}$	0.0000	$-6.6456 \cdot 10^{-3}$	0.0000	4%
$3.100 \cdot 10^{-3}$	$2.400 \cdot 10^2$	$-4.4896 \cdot 10^{-3}$	0.0000	$-3.9993 \cdot 10^{-3}$	0.0000	11%
$3.100 \cdot 10^{-3}$	$2.400 \cdot 10^2$	$-3.4482 \cdot 10^{-3}$	$1.3391 \cdot 10^1$	$-4.8898 \cdot 10^{-3}$	$1.3391 \cdot 10^1$	30%
$3.200 \cdot 10^{-3}$	$2.550 \cdot 10^2$	$-2.1932 \cdot 10^{-3}$	0.0000	$-1.5115 \cdot 10^{-3}$	0.0000	31%
$3.200 \cdot 10^{-3}$	$2.550 \cdot 10^2$	$9.3768 \cdot 10^{-3}$	$1.3871 \cdot 10^1$	$7.8908 \cdot 10^{-3}$	$1.3870 \cdot 10^1$	16%

TAB. 5.1 – Comparaison des valeurs propres dominantes des opérateurs \mathcal{L} et $\tilde{\mathcal{L}}$ et leur écart relatif δ

Nous n'avons pas fait d'étude de convergence en maillage. La raison en est que nous avons validé le système linéarisé ainsi que le calcul des modes propres sur la configuration de demi-zone avec plusieurs maillages et régularisations (*c.f.* section 3.1). Evidemment, pour dissiper les doutes possibles, il aurait été bon de faire toutes les validations en maillage, régularisation, et différents nombres de Prandtl et Marangoni.

5.6.2 Test de la perturbation ponctuelle en température sur un champ stationnaire

Fixons-nous les paramètres Pr , Ma , N_r , N_z .

Nous utiliserons la famille de perturbations numériques initiales $\delta\mathbb{T}(i_p, j_p)$, avec le couple $(i_p, j_p) \in \llbracket 0, N_r - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_z - 1 \rrbracket$, telle que :

$$\delta\mathbb{T}(i_p, j_p) = \begin{pmatrix} u_{i,j} = 0 \\ w_{i,j} = 0 \\ \theta_{i,j} = \delta_{i,i_p} \delta_{j,j_p} \end{pmatrix}_{\forall (i,j) \in \llbracket 0, N_r - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_z - 1 \rrbracket} \quad (5.44)$$

Avec δ_{i,i_p} le symbole de Kronecker

Nous perturberons le champ stationnaire \mathcal{U}_0^N à $t = 0$ en différents points (i_p, j_p) .

Pour chacune des perturbations nous mesurerons, à partir du code temporel linéarisé, a_1^{temp} que nous comparerons aux valeurs données par (5.43) calculées numériquement sur une grille de collocation de Gauss-Radau - Gauss-Lobatto, à savoir :

$$\begin{aligned}
a_1^{num} &= (\delta\mathbb{T}(i_p, j_p) | \tilde{\mathbf{u}}_1) \\
&= \int \int_{\mathcal{D}} \delta_{i,i_p} \delta_{i,j_p} \tilde{\theta}_1 r_i dr_i dz_j \\
&= r(i_p) \tilde{\theta}_1(i_p, j_p) \int \int_{\mathcal{D}} \delta_{i,i_p} \delta_{i,j_p} dr_i dz_j
\end{aligned} \tag{5.45}$$

5.6.3 Cas d'une bifurcation stationnaire (valeur propre réelle)

Au bout d'un temps $t = T$, "assez grand", nous avons :

$$\mathbf{u}_{i_p, j_p}(T) \simeq a_1(i_p, j_p) \exp(\lambda_1 T) \mathbf{u}_1 \tag{5.46}$$

Pour comparer l'effet de deux perturbations appliquées en (i_{p1}, j_{p1}) et (i_{p2}, j_{p2}) , il suffit de calculer le rapport

$$\frac{\mathbf{u}_{i_{p2}, j_{p2}}(T)}{\mathbf{u}_{i_{p1}, j_{p1}}(T)} = \frac{a_1(i_{p2}, j_{p2})}{a_1(i_{p1}, j_{p1})} \tag{5.47}$$

Plus ce rapport est grand en valeur absolue, plus la perturbation initialement en (i_{p2}, j_{p2}) est importante par rapport à la perturbation initialement en (i_{p1}, j_{p1}) .

Les points de perturbation, 8 au total, sont matérialisés sur la composante de température du champ stationnaire, perturbation dominante et perturbation adjointe dominante (*c.f.* figures 5.2 à 5.4).

Considérons un champ stationnaire à $Pr = 0.01$, $Ma = 106$, $A = 2$, $n = 13$, sur une grille de $N = 70 \times 100$ points. A ces paramètres, l'écoulement est tout juste instable (de valeur propre dominante $\lambda_1 = 1.7 \cdot 10^{-4}$), une bifurcation fourche sous-critique ayant lieu à $Ma_c = 104.4$ [19].

La figure 5.2 présente les lignes de niveau des champs de vitesses radiale et axiale, du champ de température et de la fonction de courant pour l'écoulement stationnaire \mathcal{U}_0 . La figure 5.3 donne les isovaleurs des champs du mode propre dominant \mathbf{u}_1 . La figure 5.4 donne les isovaleurs des champs du mode propre adjoint dominant $\tilde{\mathbf{u}}_1$. Le maximum de température adjointe se situe sur la surface libre, proche du point 3. La figure 5.5 donne les isovaleurs de $a_1^{num}(i_p, j_p)$ issues de la relation (5.45), et est donc une carte des sensibilités numériques du champ stationnaire vis-à-vis du mode propre dominant, relativement à la famille de perturbations (5.44).

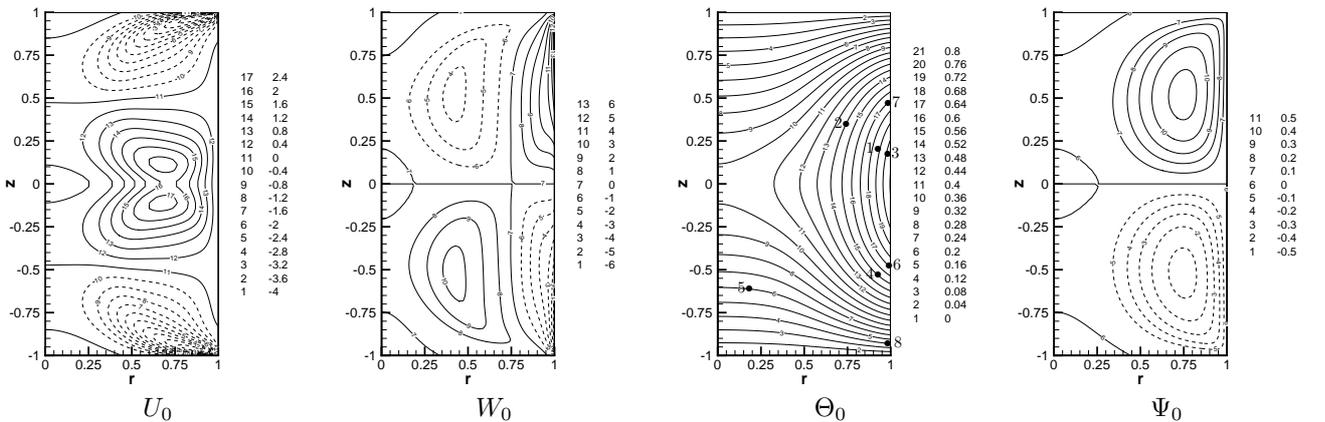


FIG. 5.2 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 et fonction de courant Ψ_0 du champ stationnaire \mathcal{U}_0 pour $Pr = 0.01$, $Ma = 106$ et $N = 70 \times 100$

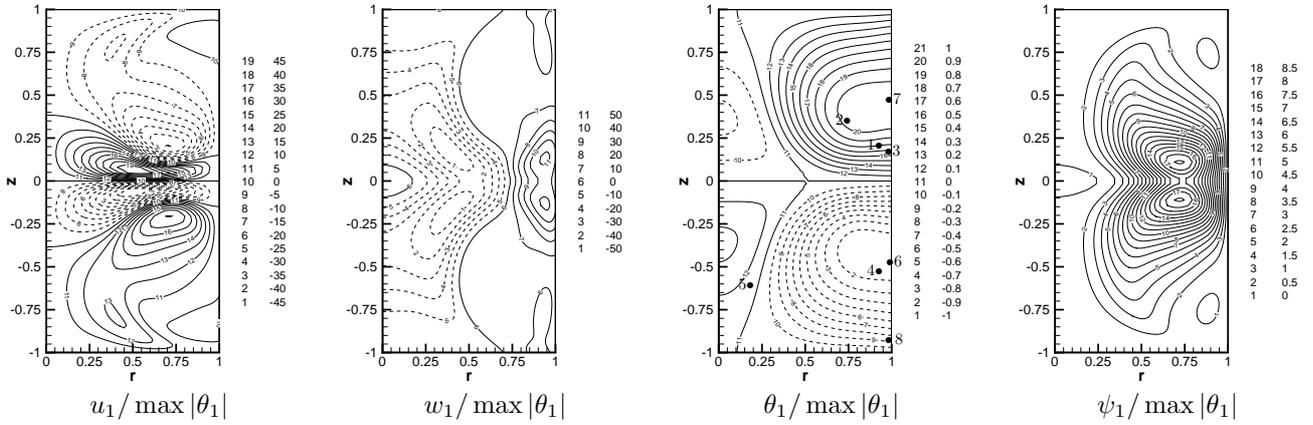


FIG. 5.3 – Composantes de vitesses radiale u_1 et axiale w_1 , température θ_1 et fonction de courant ψ_1 de la perturbation dominante de mode 0 w_1 pour $Pr = 0.01$, $Ma = 106$ et $N = 70 \times 100$

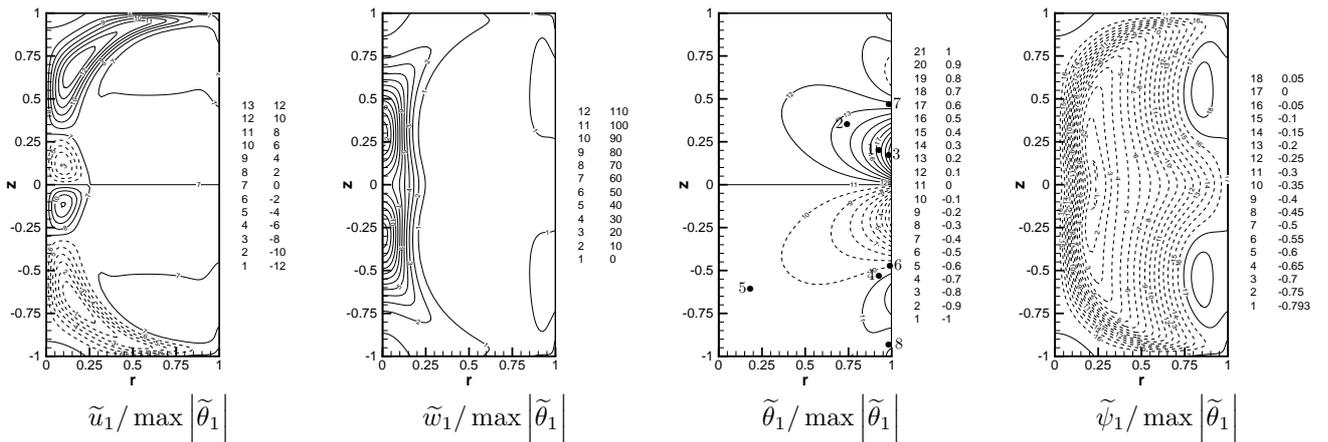


FIG. 5.4 – Premier mode propre de perturbation adjoint \tilde{u}_1 du champ stationnaire normalisé par $\max |\tilde{\theta}_1|$ pour $Pr = 0.01$, $Ma = 106$ et $N = 70 \times 100$

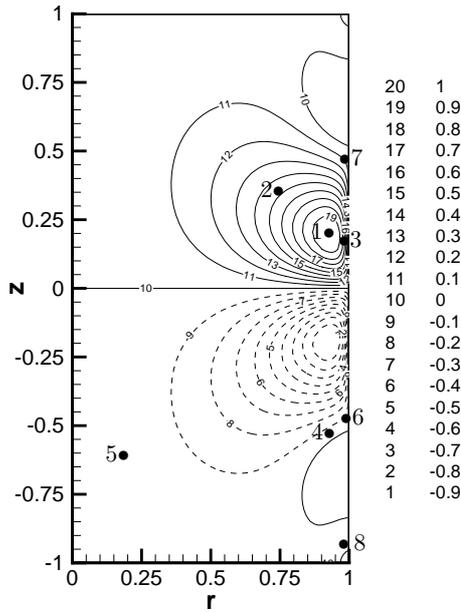


FIG. 5.5 – Sensibilités numériques normalisées du champ stationnaire à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$ vis-à-vis du premier mode propre pour la famille de perturbations $\delta\mathbb{T}(i_p, j_p)$

Le coefficient $a_1^{temp,k}$ pour chaque perturbation k (numérotée de 1 à 8) a été mesuré par un code temporel linéarisé avec lequel nous avons observé l'évolution des perturbations linéaires u^k durant un même temps T . Les champs ont été résolus sur une grille de $N = 70 \times 100$ points avec un pas de temps égal à 10^{-3} sur $45 \cdot 10^4$ itérations. Nous avons comparé entre eux les coefficients $a_1^{temp,k}$ par la relation (5.47). Plus le coefficient $a_1^{temp,k}$ est grand en valeur absolue, plus la perturbation k du champ stationnaire est importante. Le coefficient $a_1^{num,k}$ a été calculé par la relation (5.45). Nous avons regroupé les résultats dans le tableau 5.2 et reporté les valeurs sur la figure 5.6.

Perturbation k	$a_1^{temp,k} / \max_l a_1^{temp,l}$	$a_1^{num,k} / \max_l a_1^{num,l}$
1	1.0000	1.0000
2	$5.0683 \cdot 10^{-1}$	$5.0124 \cdot 10^{-1}$
3	$1.9290 \cdot 10^{-1}$	$1.3916 \cdot 10^{-1}$
7	$1.3366 \cdot 10^{-2}$	$1.4164 \cdot 10^{-2}$
8	$-5.4637 \cdot 10^{-3}$	$-6.8331 \cdot 10^{-3}$
6	$-1.3366 \cdot 10^{-2}$	$-1.4164 \cdot 10^{-2}$
5	$-2.6707 \cdot 10^{-2}$	$-2.5543 \cdot 10^{-2}$
4	$-4.2433 \cdot 10^{-2}$	$-5.3174 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.2 – Coefficients de réponse a_1^{temp} , normalisés par le coefficient maximal, ordonnés par valeurs décroissantes, et a_1^{num} aux points de perturbations également normalisés par le coefficient maximal. Ces valeurs sont reportées sur la figure 5.6

Pour évaluer la meilleure approximation linéaire de la courbe 5.6, nous ajoutons une mesure dans la statistique : lorsqu'il n'y a pas de perturbation initiale alors le coefficient a_1^{temp} est nul, et a_1^{num} également. La courbe 5.6 admet alors comme meilleure approximation une droite d'équation $y = 0.999995x - 0.00784$ avec une corrélation égale à 0.9987. Sur la figure 5.6 ont été représentés la courbe 5.6 et sa meilleure approximation.

Nous observons que la relation entre les coefficients a_1^{temp} et a_1^{num} est linéaire. Nous disposons donc, par le calcul du mode propre adjoint, d'un moyen de calculer rapidement les coefficients a_1^{temp} et donc de localiser les lieux de l'écoulement sensibles aux perturbations.

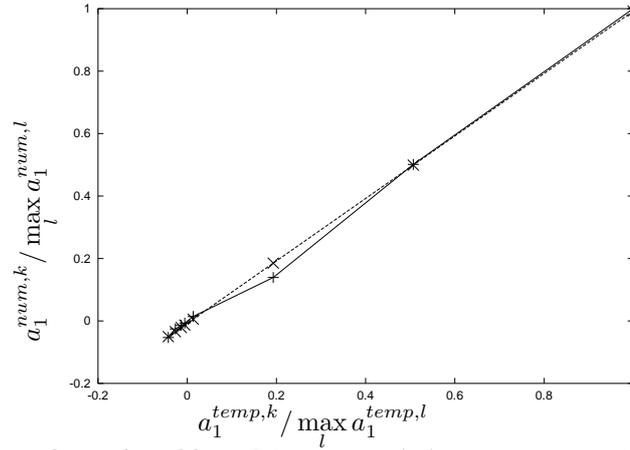


FIG. 5.6 – Courbe des valeurs du tableau 5.2 superposée à son approximation linéaire en pointillés

5.6.4 Dépendance du calcul de l'intégrale avec le maillage

Arrêtons-nous un instant sur ce premier test et demandons-nous ce qu'il advient du champ des sensibilités lorsque le nombre de mailles $N_r \times N_z$ augmente.

Le champ de sensibilité de l'écoulement pour une perturbation ponctuelle en température est calculé à partir de l'intégrale (5.45) et est donc fonction de :

$$\iint_{\mathcal{D}} \delta_{i,i_p} \delta_{j,j_p} dr_i dz_j = \int_0^1 \delta_{i,i_p} dr_i \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \delta_{j,j_p} dz_j \quad (5.48)$$

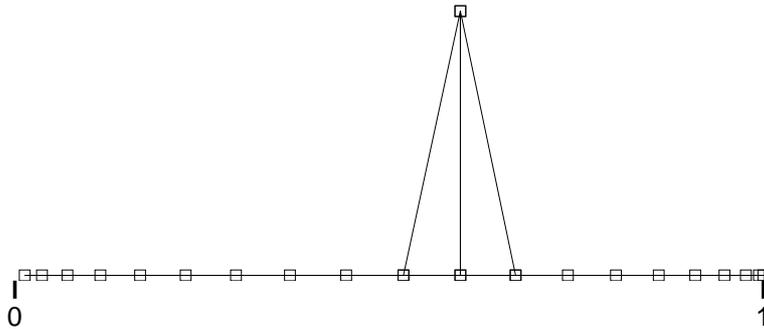
Étudions plus particulièrement, en fonction du nombre de points de Gauss-Radau, N_r :

$$I(N_r, r(i_p)) = \int_0^1 \delta_{i,i_p} dr_i \quad (5.49)$$

Déterminons, dans la limite où N_r tend vers l'infini, l'expression analytique de ce vers quoi tend $I(N_r, r(i_p))$, c'est à dire $I(r)$. Pour cela considérons, non pas l'intégrale évaluée spectralement, mais, d'une manière plus classique, par la méthode des trapèzes. Notons la $I_{trap}(N_r, r(i_p))$. En effet, lorsque le nombre de mailles augmente, les deux méthodes d'intégration (collocation pseudospectrale et trapèzes) convergent vers la même valeur.

Pour un nombre de points N_r de Gauss-Radau (ramenés entre 0 et 1), nous avons représenté une des fonctions (δ_{i,i_p}) à intégrer sur la figure 5.7. Cette intégrale vaut, par la méthode des trapèzes :

$$\begin{aligned} I_{trap}(N_r, r(i_p)) &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2(i_p - 1)}{2N_r - 1} \pi \right) \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2(i_p + 1)}{2N_r - 1} \pi \right) \right) \\ &= \sin \left(\frac{2\pi}{2N_r - 1} \right) \sin \left(\frac{2i_p}{2N_r - 1} \pi \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$


 FIG. 5.7 – Représentation de δ_{i,i_p} pour $N_r = 20$ et $i_p = 9$

Le coefficient devant $\sin\left(\frac{2i_p}{2N_r-1}\pi\right)$ ne nous intéresse pas car l'intégrale sera normalisée par son maximum, ce qui nous mène à :

$$I_{trap}(N_r, r(i_p)) \equiv \sin\left(\frac{2i_p}{2N_r-1}\pi\right) \quad (5.51)$$

Or

$$r(i_p) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2i_p}{2N_r-1}\pi\right) \right) \quad (5.52)$$

Donc

$$I(N_r, r_{i_p}) \equiv \sin(\arccos(2r_{i_p} - 1)) \quad (5.53)$$

Le passage au continu se fait en se donnant une abscisse r entre 0 et 1 et en faisant tendre le nombre de points N_r vers l'infini. i_p est fonction de N_r et est choisi de telle sorte que, lorsque N_r tend vers l'infini, r_{i_p} tend vers r . Nous obtenons alors la limite continue de $I(N_r, r_{i_p})$ lorsque N_r tend vers l'infini.

$$I(r) = \sin(\arccos(2r - 1)) \quad (5.54)$$

La figure 5.8 montre l'écart absolu entre la courbe théorique $I(r)$ et les courbes évaluées spectralement $I(50, r)$, $I(70, r)$ et $I(100, r)$, courbes par ailleurs représentées sur la figure 5.9.

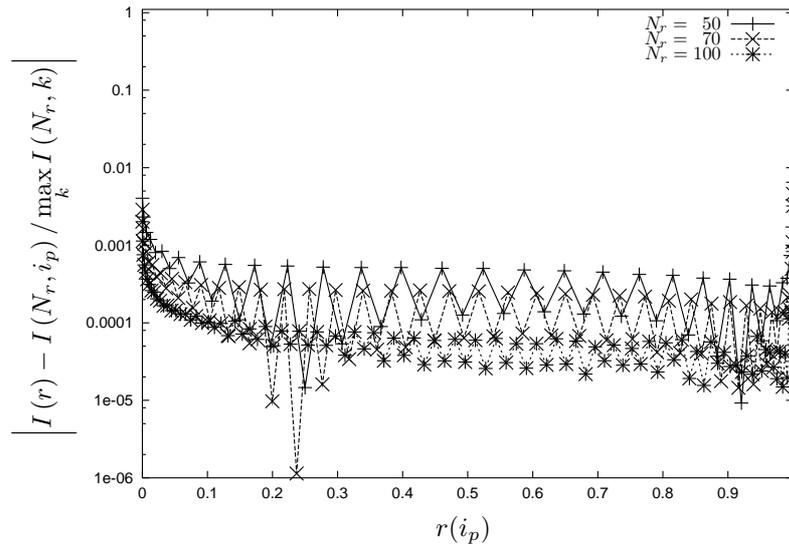
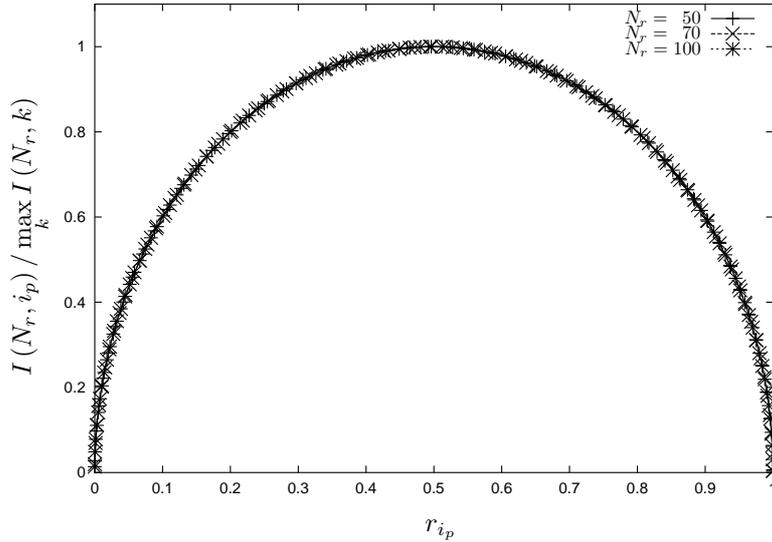


FIG. 5.8 – Distance entre $I(r)$ et $I(N_r, i_p) / \max_k I(N_r, k)$ en fonction de r_{i_p} pour $N_r = 50$, $N_r = 70$ et $N_r = 100$

Discussion :

Nous devrions nous attendre à ce que, quand le nombre de mailles augmente, a_1^{num} tende vers la valeur calculée par la formule (5.37). D'après ce que nous venons de voir avec la forme de l'intégrale discrète $I(N_r, i_p)$, il n'en est rien.

Intéressons-nous plus particulièrement au maximum de a_1^{num} . Le maximum de la composante en température de \tilde{u}_1 , c'est à dire $\tilde{\theta}_1$, est sur la surface libre ($r = 1$). En augmentant le nombre de mailles le maximum est toujours localisé sur la surface libre. Nous supposons que c'est le cas pour la limite continue de la composante $\tilde{\theta}_1$. Donc le calcul analytique de a_1^{num} , par (5.37), indique que le maximum se trouve sur la surface libre.


 FIG. 5.9 – $I(N_r, i_p) / \max_k I(N_r, k)$ en fonction de r_{i_p} pour $N_r = 50$, $N_r = 70$ et $N_r = 100$

Or l'intégrale discrète $I(N_r, i_p)$ s'annule à la surface libre, et sa limite continue $I(r)$ aussi. Donc le coefficient a_1^{num} , calculé par (5.45), ne sera jamais maximal sur la surface libre.

Finalement, si le champ adjoint \tilde{u}_1 est convergé en maillage, les cartes des sensibilités calculées par (5.37) (c.f. figure 5.10) et (5.45) (c.f. figure 5.5), pour la famille de perturbations $\delta\mathbb{T}(i, j)$, seront toujours différentes et ne tendront pas l'une vers l'autre avec le maillage.

Ceci s'explique par le fait que la famille discrète de perturbations $\delta\mathbb{T}(i, j)$, bien qu'elles soient ponctuelles (symbole de Kronecker), n'a pas la même propriété que celle utilisée dans le cas continu, à savoir des fonctions de Dirac. L'intégrale d'une fonction de Dirac est égale à 1 sur le domaine \mathcal{D} , alors que ce n'est pas le cas de l'intégrale discrète du symbole de Kronecker au même point, sur le même domaine.

Remplacer une fonction de Dirac du domaine continu par un symbole de Kronecker dans un domaine discret ne doit pas se faire sans prendre certaines précautions. Certaines propriétés sont à conserver, quitte à changer les symboles de Kronecker par une autre famille de fonctions. Ici, c'est l'intégrale de la fonction qui doit être conservée, ce qui revient à dire que l'énergie de la perturbation discrète doit être la même que dans le cas d'une perturbation dans le domaine continu appliquée au même point.

Pour comparer la famille des perturbations en température du continu 5.36 à son équivalent discret, il suffit de considérer la famille des perturbations en températures du discret 5.44 renormalisée par l'intégrale (5.48). Les cartes des sensibilités (c.f. figures 5.10 et 5.5) auront alors la même structure.

5.6.5 Cas d'une bifurcation instationnaire (valeur propre avec partie imaginaire non nulle)

Nous avons vu qu'au bout d'un temps assez long (5.5) :

$$u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \exp(\sigma_1 t) \left[(a_1^r u_1^r - a_1^i u_1^i) \cos(\omega_1 t) - (a_1^r u_1^i + a_1^i u_1^r) \sin(\omega_1 t) \right]$$

Nous avons fait notre test sur un champ stationnaire à $Pr = 0.002$, $Ma = 130$, $A = 2$, $n = 13$, sur une grille de $N = 100 \times 150$ points. A ces paramètres, l'écoulement est instable ($\lambda_1 = 4.98 \cdot 10^{-2} + i8.85$), via une bifurcation de Hopf apparue à $Ma = 124.8$. Les points de perturbation seront au nombre de 6.

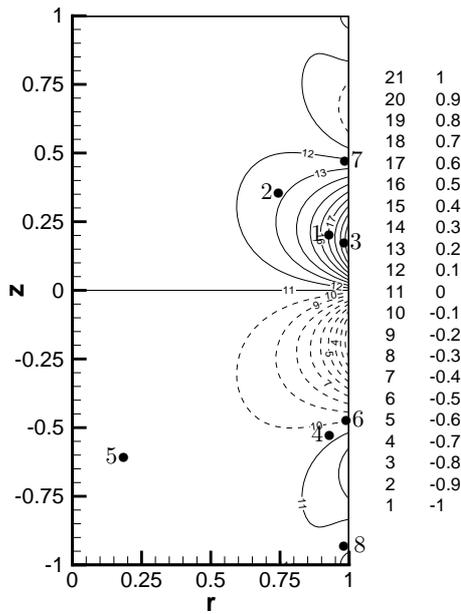


FIG. 5.10 – Sensibilités physiques normalisées du champ stationnaire à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$ vis-à-vis du premier mode propre pour une famille de perturbations impulsionnelles en température

La figure 5.11 présente les lignes de niveaux des champs de vitesses radiale et axiale, du champ de température et de la fonction de courant pour l'écoulement stationnaire \mathcal{U}_0 . Le module du mode propre dominant \mathfrak{u}_1 est représenté sur la figure 5.12. Le module du mode propre adjoint dominant $\tilde{\mathfrak{u}}_1$ est représenté sur la figure 5.13. La figure 5.14, carte des sensibilités numériques du champ stationnaire vis-à-vis du mode propre dominant, est une représentation des $|a_1(i_p, j_p)|$.

Le module du coefficient a_1^{temp} pour chaque perturbation (numérotée de 1 à 6) a été mesuré de la manière suivante : nous nous sommes placés en un point de l'écoulement et avons observé une de ses composantes, et ce pour toutes les perturbations. Cette composante se comporte comme une exponentielle, dont le taux de croissance est la partie réelle de la valeur propre dominante, et est modulée par une fonction trigonométrique de pulsation égale à la partie imaginaire de la valeur propre dominante (*c.f.* figure 5.16). Nous avons alors cherché le meilleur coefficient pour obtenir l'enveloppe exponentielle de l'observation. Plus le module de ce coefficient est grand, plus la perturbation du champ stationnaire est importante. Nous avons regroupé les résultats dans le tableau 5.3 et reporté les valeurs sur le diagramme 5.17. Les champs calculés avec le code temporel ont été résolus sur une grille de $N_r \times N_z = 100 \times 150$ points avec un pas de temps égal $2 \cdot 10^{-4}$ sur $30 \cdot 10^4$ itérations.

Perturbation k	$ a_1^{temp,k} / \max_l a_1^{temp,l} $	$ a_1^{num,k} / \max_l a_1^{num,l} $
1	1.0000	1.0000
2	$6.2500 \cdot 10^{-1}$	$5.3699 \cdot 10^{-1}$
3	$2.4837 \cdot 10^{-1}$	$2.5673 \cdot 10^{-1}$
4	$7.3052 \cdot 10^{-2}$	$1.1383 \cdot 10^{-1}$
5	$3.0844 \cdot 10^{-2}$	$7.1312 \cdot 10^{-2}$
6	$1.2256 \cdot 10^{-2}$	$4.1375 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.3 – Coefficients de réponse a_1^{temp} , normalisés par le coefficient maximal, ordonnés par valeurs absolues décroissantes, et a_1^{num} aux points de perturbations également normalisés par le coefficient maximal. Ces valeurs sont reportées sur la figure 5.17

Pour évaluer la meilleure approximation de la courbe 5.17 nous procédons de la même manière que pour la perturbation stationnaire en 5.6.3, nous ajoutons une mesure à la statistique : lorsqu'il n'y a pas de perturbation initiale alors les coefficients a_1^{temp} et a_1^{num} sont nuls. La courbe 5.17 admet comme meilleure approximation une droite d'équation $y = 0.93610x + 0.022254$ avec une corrélation

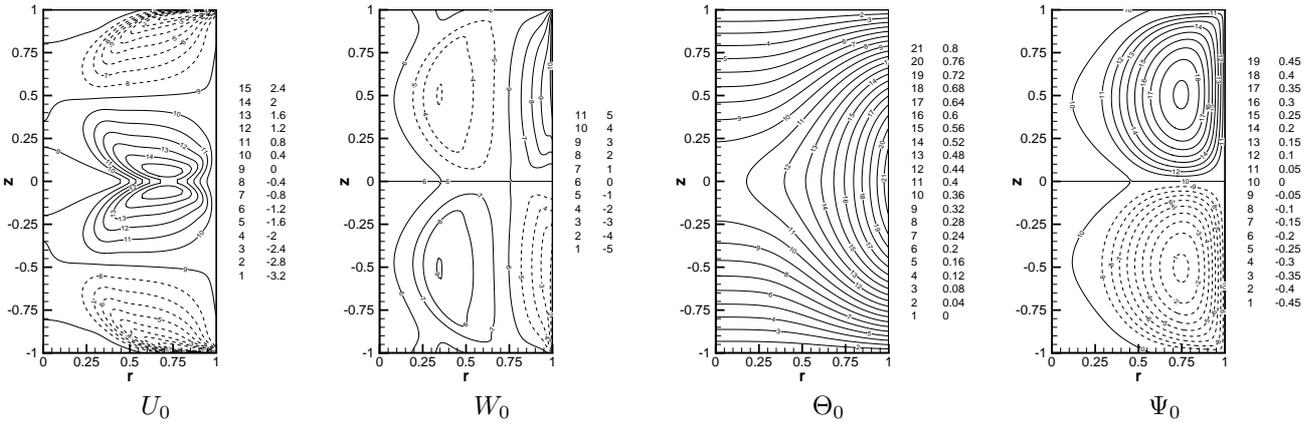


FIG. 5.11 – Composantes de vitesses radiale U_0 et axiale W_0 , température Θ_0 et fonction de courant Ψ_0 du champ stationnaire U_0 pour $Pr = 0.002$, $Ma = 130$ et $N = 100 \times 150$

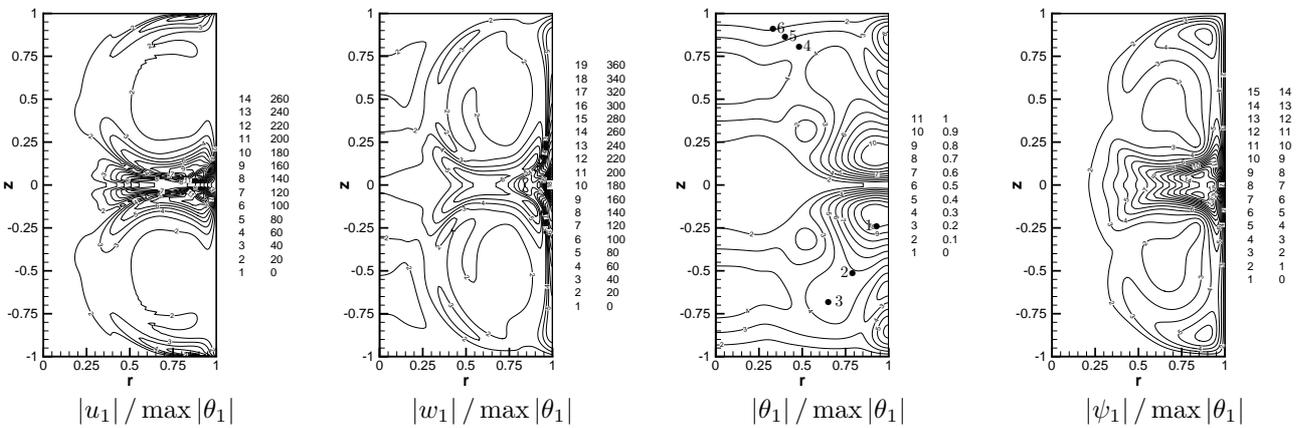


FIG. 5.12 – Module des composantes de vitesses radiale $|u_1|$ et axiale $|w_1|$, température $|\theta_1|$ et fonction de courant $|\psi_1|$ de la perturbation dominante de mode 0 normalisés par $\max |\theta_1|$ pour $Pr = 0.002$, $Ma = 130$ et $N = 100 \times 150$

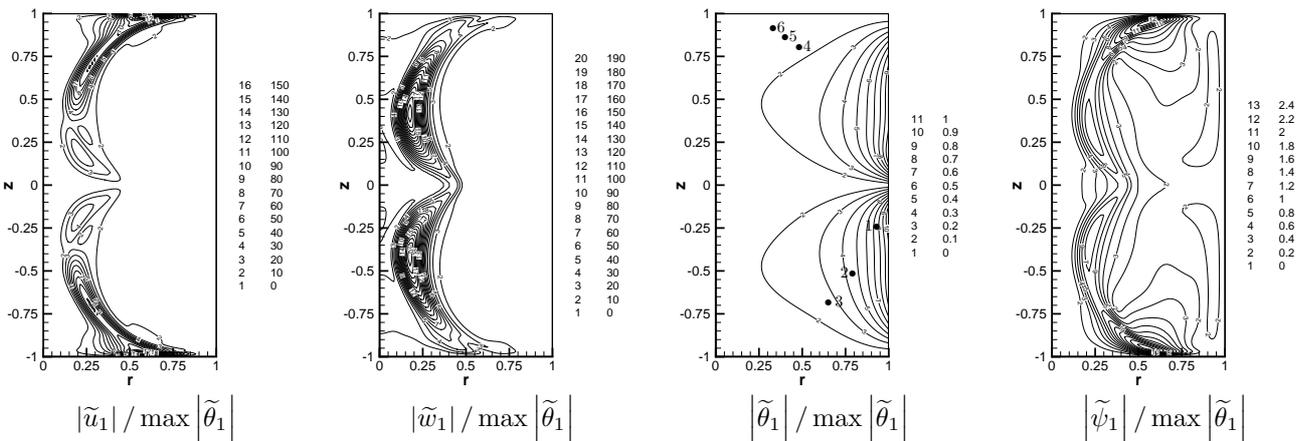


FIG. 5.13 – Premier mode propre de perturbation adjoint \tilde{u}_1 du champ stationnaire normalisé par $\max |\tilde{\theta}_1|$ pour $Pr = 0.002$, $Ma = 130$ et $N = 100 \times 150$

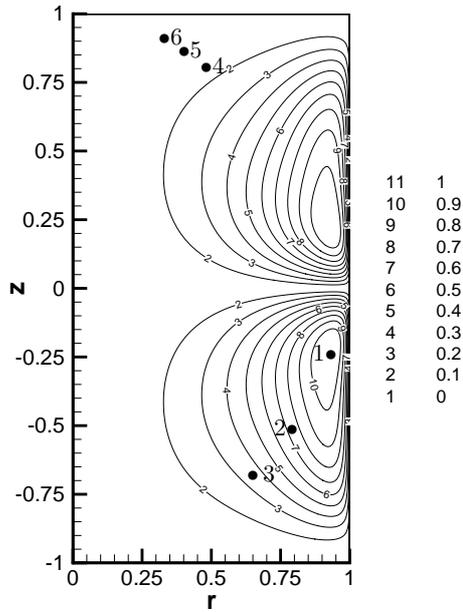


FIG. 5.14 – Sensibilités numériques normalisées du champ stationnaire à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$ vis-à-vis du premier mode propre pour la famille de perturbations $\delta\mathbb{T}(i_p, j_p)$

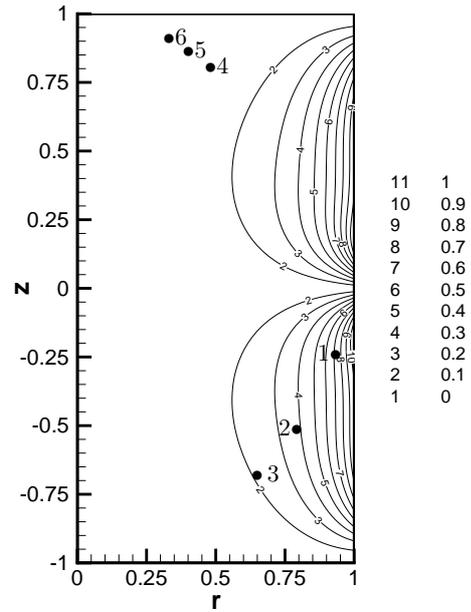


FIG. 5.15 – Sensibilités physiques normalisées du champ stationnaire à $Pr = 0.002$ et $Ma = 130$ vis-à-vis du premier mode propre pour la famille de perturbations $\delta\mathbb{T}(i_p, j_p)$

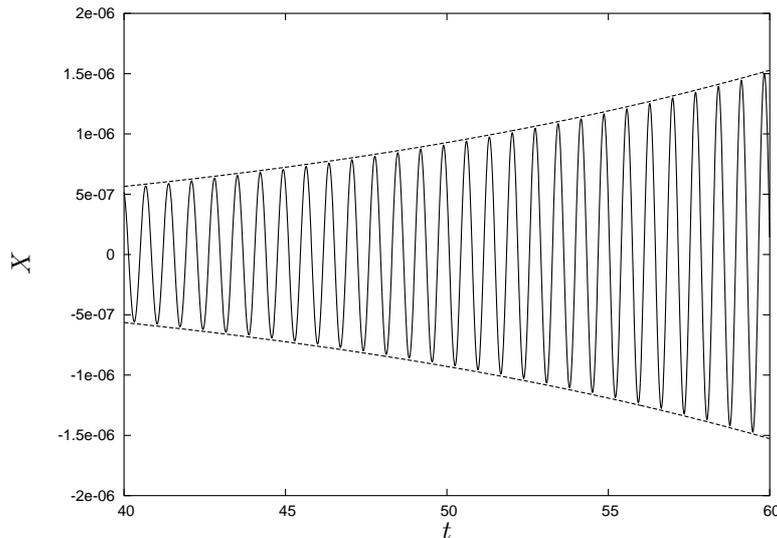


FIG. 5.16 – Historique d'une composante de l'écoulement en un point et l'enveloppe exponentielle de l'observable

égale à 0.9948 (*c.f.* figure 5.17).

La discussion en 5.6.4 reste valable dans cette section. Nous nous sommes servis de la même famille de perturbations discrètes, donc nous rencontrons les mêmes problèmes qu'en 5.6.3 en ce qui concerne la convergence de la carte des sensibilités numériques 5.14 vers la carte des sensibilités physiques 5.15 avec le nombre de mailles.

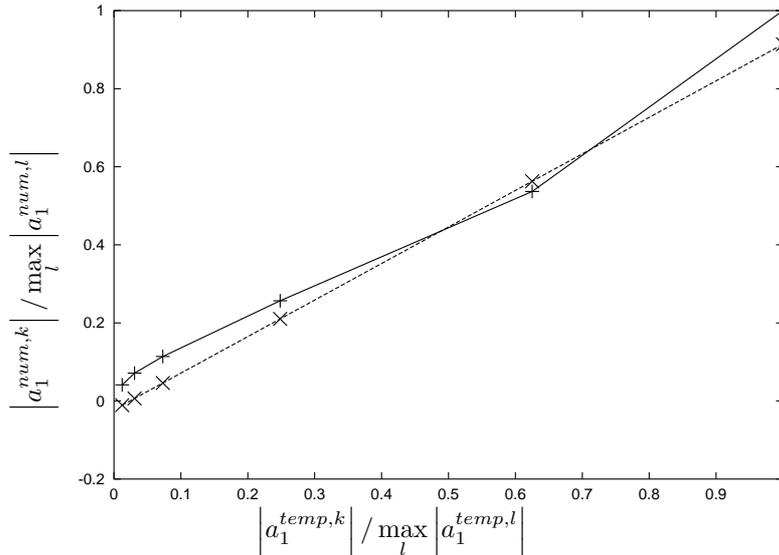


FIG. 5.17 – Courbe des valeurs du tableau 5.3 superposée à son approximation linéaire en pointillés

5.6.6 Test d'une perturbation, "gaussienne", en température sur un champ stationnaire

Testons une autre perturbation que (5.44) vue en 5.6.2 sur le champ stationnaire de la figure 5.2 ayant pour paramètres $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$. Rappelons que le seuil se situe à $Ma = 104.4$ pour une bifurcation Fourche.

La perturbation a la forme d'une gaussienne qui s'annule sur le bord $\partial\mathcal{D}$ du domaine. Pour cela, on prendra une gaussienne modulée par un polynôme qui s'annule sur $\partial\mathcal{D}$. La perturbation dépend de deux paramètres r_p et z_p qui sont les coordonnées du centre de la gaussienne. La forme analytique de la perturbation, sur le domaine \mathcal{D} est donné par (5.55) :

$$\delta\mathbb{T}_g(r_p, z_p) = \begin{pmatrix} u_{r,z} = 0 \\ w_{r,z} = 0 \\ \theta_{r,z} = \frac{r(1-r)(z^2-1)}{r_p(1-r_p)(z_p^2-1)} e^{-100((r-r_p)^2+(z-z_p)^2)} \end{pmatrix}_{(r,z) \in \mathcal{D}} \quad (5.55)$$

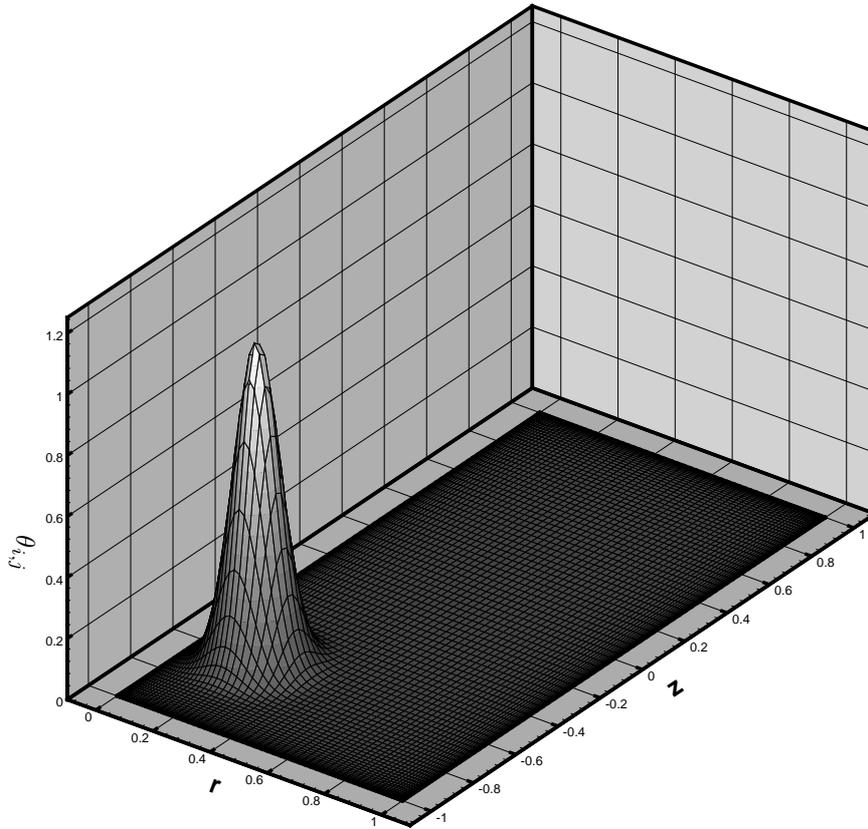
dont une représentation pour $r_p = r(20)$, $z_p = z(30)$, sur une grille $N_r \times N_z = 70 \times 100$ est donnée sur la figure 5.18.

Nous perturberons le champ stationnaire en prenant le centre de la gaussienne sur les mêmes points où nous avons perturbé ce même champ stationnaire avec des perturbations ponctuelles en 5.6.3.

Le coefficient a_1 pour chaque perturbation (toujours numérotée de 1 à 8 comme en 5.6.3) a été calculé. Plus ce coefficient est grand en valeur absolue, plus la perturbation du champ stationnaire est importante. Nous avons regroupé les résultats dans le tableau 5.4 et reporté les valeurs sur le diagramme 5.19.

Pour évaluer la meilleure approximation de la courbe 5.19, nous prenons en compte la même mesure supplémentaire qu'en 5.6.3 : lorsqu'il n'y a pas de perturbation initiale alors le coefficient a_1 est nul. La courbe 5.19 admet alors comme meilleure approximation une droite d'équation $y = 1.012x - 0.001404$ avec une corrélation égale à 0.9995.

La carte des sensibilités numériques pour la famille de perturbations (5.55) est représentée sur la figure 5.20. Le maximum de sensibilité du système numérique se situe sur la surface libre.

FIG. 5.18 – Composante θ de la perturbation $\delta\mathbb{T}(20, 30)$

Perturbation k	$a_1^{temp,k} / \max_l a_1^{temp,l}$	$a_1^{num,k} / \max_l a_1^{num,l}$
3	1.0000	1.0000
7	$2.7196 \cdot 10^{-1}$	$2.9524 \cdot 10^{-1}$
1	$1.6769 \cdot 10^{-2}$	$1.6790 \cdot 10^{-2}$
2	$7.0603 \cdot 10^{-3}$	$7.1266 \cdot 10^{-3}$
8	$-7.1989 \cdot 10^{-5}$	$-1.7009 \cdot 10^{-5}$
5	$-5.5515 \cdot 10^{-4}$	$-5.5896 \cdot 10^{-4}$
4	$-2.8830 \cdot 10^{-3}$	$-3.1313 \cdot 10^{-3}$
6	$-2.7196 \cdot 10^{-1}$	$-2.9524 \cdot 10^{-1}$

TAB. 5.4 – Coefficients de réponse a_1^{temp} , normalisés par le coefficient maximal, ordonnés par valeur absolue décroissante, et a_1^{num} aux points de perturbations également normalisés par le coefficient maximal. Ces valeurs sont reportées sur la figure 5.19

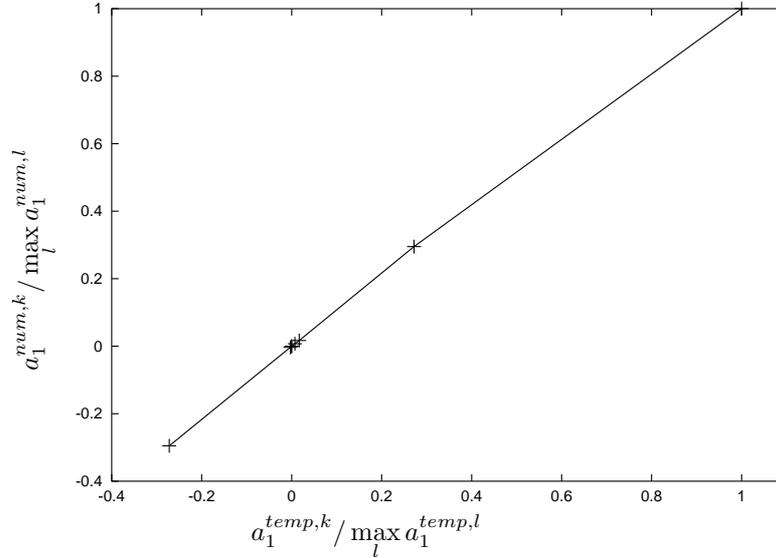
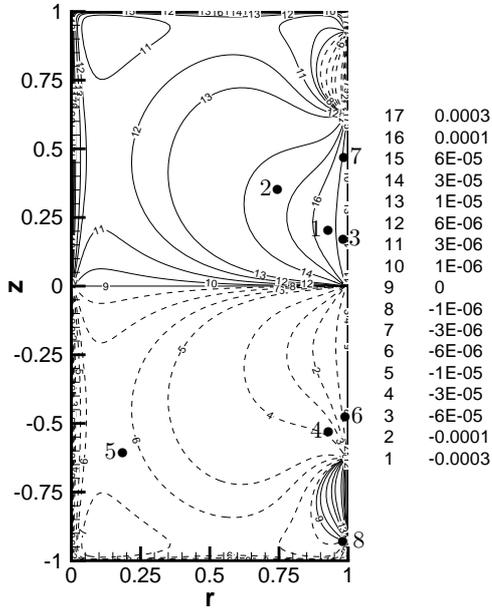


FIG. 5.19 – Courbe des valeurs du tableau 5.4


 FIG. 5.20 – Sensibilités numériques normalisées du champ stationnaire à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$ vis-à-vis du premier mode propre pour la famille de perturbations $\delta\mathbb{T}_g(i_p, j_p)$

5.6.7 Test d'une perturbation, "gaussienne", en vitesse sur un champ stationnaire

Testons une perturbation en vitesse sur le champ stationnaire 5.2 ($Pr = 0.01$, $Ma = 106$). La difficulté réside dans l'application d'une perturbation à divergence nulle. En effet, les vecteurs de base étant à divergence nulle, nous ne pouvons décomposer une perturbation ayant une divergence non nulle sur cette base. Nous décidons donc d'appliquer un champ de vitesse issu d'un rotationnel d'un champ \vec{A} n'ayant qu'une composante : une composante normale au plan (r, z) . Les conditions aux limites ne sont pas un soucis, nous pourrons toujours utiliser un polynôme qui s'annule sur $\partial\mathcal{D}$ pour moduler la forme principale de la perturbation.

$$\vec{A} = (0, A_\varphi, 0) \quad (5.56)$$

Choisissons A_φ de la même forme que (5.55), avec $\alpha < 0$ et β un coefficient de normalisation à déterminer lorsque la forme de la perturbation de vitesse sera connue :

$$A_\varphi(r_p, z_p) = \frac{1}{\beta} r^2 (1-r)^2 (z^2 - 1)^2 e^{\alpha((r-r_p)^2 + (z-z_p)^2)} \quad (5.57)$$

donne :

$$\delta\mathbb{U}_g(r_p, z_p) = \overrightarrow{rot}(A_\varphi(r_p, z_p)) \quad (5.58)$$

et d'une manière un peu plus développée :

$$\delta\mathbb{U}_g(r_p, z_p) = \begin{pmatrix} u_{r,z} = -\frac{1}{\beta} 2r^2(1-r)^2(z^2-1) [2z + \alpha(z-z_p)(z^2-1)] e^{\alpha((r-r_p)^2+(z-z_p)^2)} \\ w_{r,z} = \frac{1}{\beta} r(1-r)(z^2-1)^2 [3-5r+2\alpha r(r-r_p)(1-r)] e^{\alpha((r-r_p)^2+(z-z_p)^2)} \\ \theta_{r,z} = 0 \end{pmatrix}_{(r,z) \in \mathcal{D}} \quad (5.59)$$

avec

$$\beta = \sqrt{\left(r_p^2(1-r_p)^2(z_p^2-1)z_p\right)^2 + \left(r_p(1-r_p)(z_p^2-1)^2(3-5r_p)\right)^2} \quad (5.60)$$

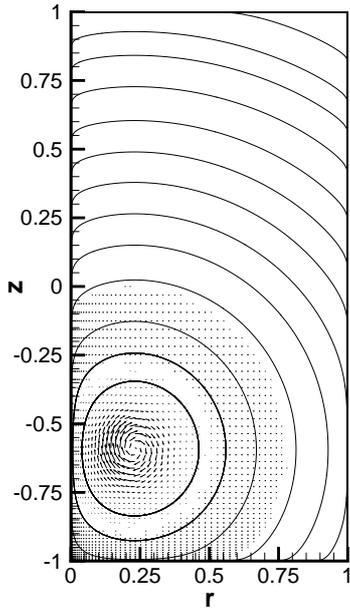


FIG. 5.21 – Représentation de la vitesse de la perturbation $\delta\mathbb{U}(20, 30)$ ainsi que quelques lignes de courant. $\alpha = -100$

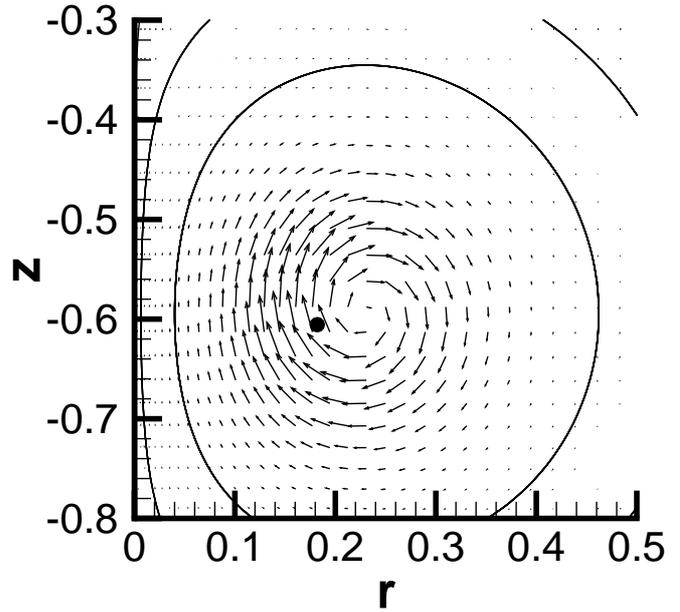


FIG. 5.22 – Détail de la figure 5.21. Le cercle plein matérialise le point de coordonnées (20, 30)

Le centre du tourbillon n'est pas situé au point de coordonnées (r_p, z_p) . Ceci s'explique par le fait que le potentiel vecteur qui sert à calculer le champ de vitesse n'est pas maximal en (r_p, z_p) . A z constant, A_φ varie comme $r^2(1-r)^2 e^{\alpha(r-r_p)^2}$. Les deux fonctions $r^2(1-r)^2$ et $e^{\alpha(r-r_p)^2}$ définies pour r entre 0 et 1 sont positives et admettent 1 comme maximum. Mais les maxima de ces deux fonctions sont situés en $r = 0.5$ pour l'une et $r = r_p$ pour l'autre, ne coïncident pas, donc le maximum du produit de ces deux fonctions ne se trouve pas nécessairement en $r = r_p$.

Nous avons perturbé le champ stationnaire \mathbb{U}_0 avec la perturbation précédemment définie aux points où celui-ci a déjà été perturbé en température. Les coefficients obtenus par le code temporel (a_1^{temp}) et par le produit scalaire du mode propre adjoint dominant avec la perturbation (a_1^{num} , c.f. (5.39)) sont reportés dans le tableau 5.5.

Pour évaluer la meilleure approximation des données contenues dans le tableau 5.5, nous procédons de la même manière que pour la perturbation stationnaire en 5.6.3, et prenons en compte une mesure supplémentaire : lorsqu'il n'y a pas de perturbation initiale alors les coefficients a_1^{temp} et a_1^{num} sont nuls. La meilleure approximation est une droite d'équation $y = 0.99998x - 1.33 \cdot 10^{-4}$ avec une corrélation égale à 0.999998. Autrement dit, les deux coefficients a_1^{temp} et a_1^{num} sont proportionnels.

Perturbation k	$a_1^{temp,k} / \max_l a_1^{temp,l}$	$a_1^{num,k} / \max_l a_1^{num,l}$
1	$2.0907 \cdot 10^{-1}$	$2.0884 \cdot 10^{-1}$
2	$-1.4891 \cdot 10^{-1}$	$-1.4882 \cdot 10^{-1}$
3	$-5.4658 \cdot 10^{-2}$	$-5.5459 \cdot 10^{-2}$
4	$-2.2329 \cdot 10^{-2}$	$-2.2314 \cdot 10^{-2}$
5	$-1.7178 \cdot 10^{-2}$	$-1.7200 \cdot 10^{-2}$
6	-1.0000	-1.0000
7	$-3.7769 \cdot 10^{-1}$	$-3.7749 \cdot 10^{-1}$
8	-1.0000	-1.0000

TAB. 5.5 – Coefficients de réponse a_1^{temp} , normalisés par le coefficient maximal, et a_1^{num} aux points de perturbations également normalisés par le coefficient maximal

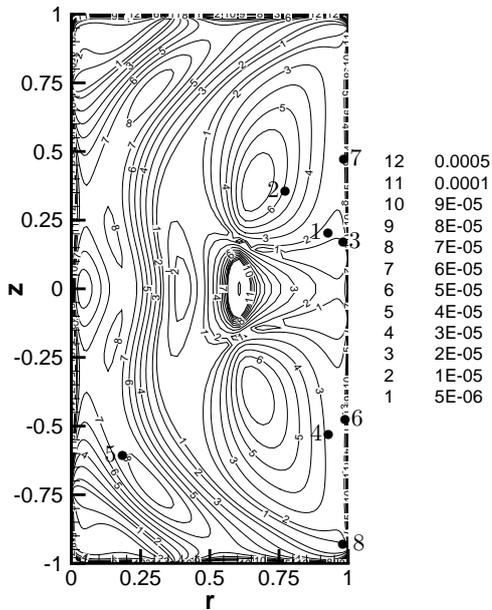


FIG. 5.23 – Sensibilités numériques normalisées du champ stationnaire à $Pr = 0.01$ et $Ma = 106$ vis-à-vis du premier mode propre pour la famille de perturbations $\delta U_g(i_p, j_p)$

Le lieu le plus sensible de l'écoulement stationnaire vis-à-vis d'une perturbation en vorticité de forme gaussienne est sur le plan médian. Cette zone est également celle où le taux de croissance de l'énergie cinétique est maximal (*c.f.* figure 3.30). Il faut garder   l'esprit que la perturbation n'est pas appliquée en tout point de l'écoulement avec la même énergie. Il n'est donc pas pertinent de faire un rapprochement entre les deux figures tant que les perturbations ne seront pas normalisées en énergie.

5.6.8 Discussion

Nous avons vu que l'approche de l'adjoint pour la recherche des lieux de l'écoulement, sensibles aux perturbations, donne des résultats plus que satisfaisants. La méthode a non seulement été validée en comparant les valeurs propres de l'opérateur adjoint   celles de l'opérateur direct, mais aussi par la concordance entre les valeurs relatives du coefficient a_1 du premier mode propre, pour plusieurs perturbations en température, obtenues par deux méthodes différentes : par la simulation directe des équations linéarisées et par la projection des perturbations sur le premier mode propre adjoint. Nous pouvons donc comparer l'efficacité de deux perturbations sur le champ stationnaire, dans le domaine linéaire.

5.7 Sensibilité en fonction du nombre de Prandtl

Dans cette section, le mode propre adjoint dominant des écoulements stationnaires critiques pour le mode 0 a été calculé pour chaque point de la courbe de stabilité de la figure 3.9. Sur chaque portion de la courbe de stabilité, nous localiserons les points de l'écoulement stationnaire critique les plus sensibles vis- -vis de perturbations impulsives, de même amplitude, en température ou en vorticité. S'en suivra une comparaison avec l'étude des instabilités de mode 0 faite   la section 3.2.2. Le maximum de la température du mode propre adjoint dominant est toujours sur la surface libre, donc il ne sera fait mention que de la cote z_Θ de ce maximum qui localise le lieu le plus sensible du champ de température de l'écoulement stationnaire. Les lieux sensibles seront matérialisés sur les figures dans la partie supérieure du domaine car le plan médian est un plan de symétrie du domaine.

5.7.1 $Pr \in [0.001; 0.0034]$, bifurcation de Hopf

Sur cet intervalle de nombre de Prandtl, la bifurcation est du type bifurcation de Hopf. Pour une perturbation ponctuelle en température, les lieux de l'écoulement stationnaire critique les plus sensibles sont en $z_\Theta = \pm 0.2$   $Pr = 0.001$ et $z_\Theta = \pm 0.18$   $Pr = 0.0035$. Sur tout l'intervalle de nombre de Prandtl, les lieux les plus sensibles pour une perturbation en vorticité sont situés en deux points seulement : en $r_\Omega = 0.54$ et $z_\Omega = \pm 0.94$. Ces lieux sont représentés sur la figure 5.24.

Une perturbation en température sur la surface libre ne modifie pas que la température, mais aussi la contrainte de vitesse imposée sur la surface libre. Cette contrainte équivaut au rotationnel de l'écoulement sur la surface libre. Donc une perturbation en température sur la surface libre équivaut   une perturbation en rotationnel sur la surface libre.

Le lieu sensible   une perturbation ponctuelle en température est   la hauteur du bout de la langue de vorticité (*c.f.* figure 3.20, page 51) qui remonte le long de la surface libre   partir du plan médian. Le lieu sensible   la perturbation en vorticité se situe près du front solide sur la langue de vorticité qui provient du point triple.

5.7.2 $Pr \in [0.0035, 0.007]$, bifurcation fourche

La bifurcation change de nature et passe d'un type Hopf   un type fourche dont le seuil est croissant avec le nombre de Prandtl. Le lieu de l'écoulement stationnaire le plus sensible vis- -vis d'une perturbation ponctuelle en température est quasiment   une cote constante, $z_\Theta \simeq \pm 0.13$, sur l'intervalle investi. Le lieu de l'écoulement critique le plus sensible   une perturbation ponctuelle en vorticité se situe près de l'axe autour de $r_\Omega = 0.135$ et $z_\Omega = \pm 0.35$. Ces lieux sont représentés sur la figure 5.25.

La langue de vorticité de l'écoulement stationnaire descend des points triples, arrive jusqu'  la surface libre, en passant le long du plan médian, et remonte jusqu'  une hauteur $z \simeq \pm 0.25$. Le lieu de l'écoulement stationnaire le plus sensible vis- -vis d'une perturbation ponctuelle en température

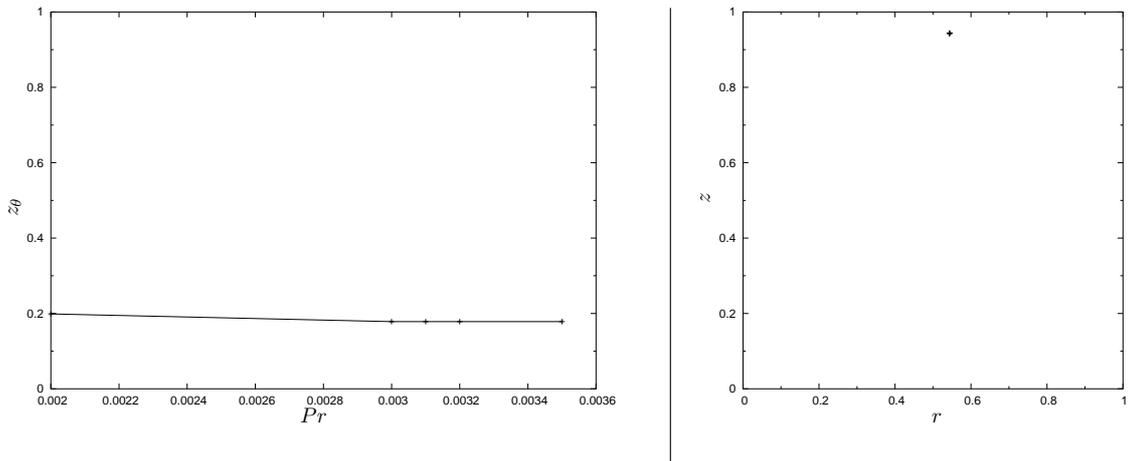


FIG. 5.24 – Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle en température (à gauche) et en rotationnel (à droite) pour $Pr \in [0.001; 0.0034]$

est face à cette structure de vorticité.

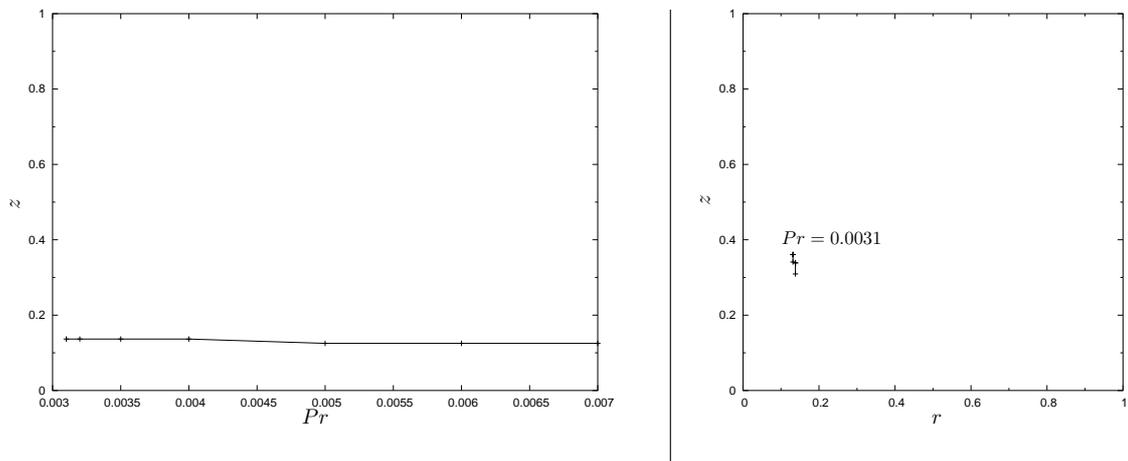


FIG. 5.25 – Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle en température (à gauche) et en rotationnel (à droite) pour $Pr \in [0.0035, 0.007]$

Le lieu le plus sensible à une perturbation en vorticité se situe près de l'isovaleur nulle de la fonction de courant (*c.f.* figure 5.26), en amont de la zone la plus élevée du taux de croissance de l'énergie cinétique (*c.f.* figure 3.30, page 59). Une perturbation en vorticité appliquée   cet endroit pourrait être convectée par l'écoulement vers le lieu où le taux de croissance de l'énergie est maximal et y croître.

5.7.3 $Pr \in [0.008, 0.0315]$, bifurcation fourche

Le seuil de la bifurcation fourche est devenu décroissant pour croître   nouveau avec le nombre de Prandtl, avec un minimum   $Pr = 0.012$. Les lieux de l'écoulement critique les plus sensibles vis- -vis de perturbations ponctuelles en température et en vorticité sont reportés sur la figure 5.27.

Le lieu de l'écoulement stationnaire critique le plus sensible   une perturbation ponctuelle en température se situe en $z_\Theta \in [0.12, 0.19]$ et $z_\Theta \in [-0.19, -0.12]$. Cette zone est, comme les précédents lieux décrits, en face, ou proche, de la langue de vorticité de l'écoulement stationnaire qui provient des points triples et remonte le long de la surface libre en passant le long du plan médian.

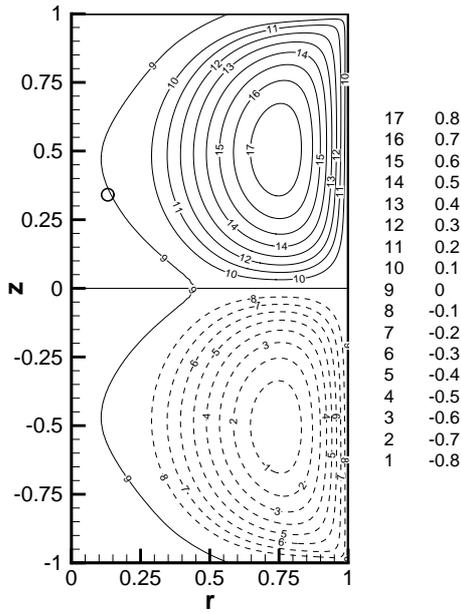


FIG. 5.26 – Fonction de courant à $Pr = 0.004$, $Ma = 355$ et, marqué d'un cercle, le lieu le plus sensible pour une perturbation ponctuelle en vorticité

Sur l'intervalle de nombres de Prandtl étudiés, le lieu de l'écoulement sensible   une perturbation ponctuelle en vorticité se trouve sur une courbe qui possède un point de rebroussement proche du plan médian correspondant   $Pr = 0.012$. Ce lieu sensible est, de la même manière que pour $Pr \in [0.0035, 0.007]$, très proche de l'isovaleur nulle de la fonction de courant, en amont de la zone où le taux de croissance de l'énergie cinétique est maximal.

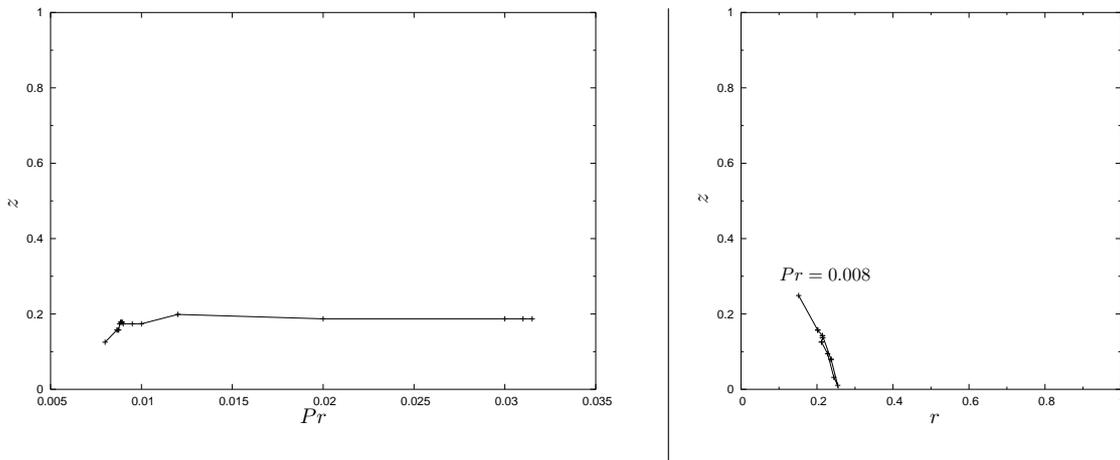


FIG. 5.27 – Lieux de l'écoulement critique sensibles   une perturbation ponctuelle en température (  gauche) et en rotationnel (  droite) pour $Pr \in [0.008, 0.0315]$

5.7.4 $Pr \in [0.019, 0.0312]$, restabilisation via une bifurcation fourche

L'écoulement devient   nouveau stable   haut nombre de Marangoni sur cet intervalle de nombres de Prandtl. Les lieux sensibles des écoulements stationnaires vis- -vis de perturbations ponctuelles en température ou en vorticité sur cet intervalle de nombre de Prandtl sont reportés sur la figure 5.28. Le lieu de l'écoulement critique le plus sensible   une perturbation ponctuelle en température est, sur cet intervalle,   une cote constante : $z_\Theta \simeq 0.187$. Cette zone est également proche de la langue de vorticité provenant du point triple et qui, passant le long du plan médian, remonte le long de la surface libre. La cote atteinte par le bout de cette langue n'est pourtant pas au niveau du lieu de l'écoulement sensible   une perturbation en température.

Le lieu de l'écoulement critique le plus sensible   une perturbation ponctuelle en vorticité se rapproche de l'axe et s'éloigne du plan médian avec le nombre de Marangoni critique croissant. Ce lieu,

à l'image de ceux déjà décrits, se situe très proche de l'isovaleur nulle de la fonction de courant et en amont de la zone où le taux de croissance de l'énergie cinétique est maximal.

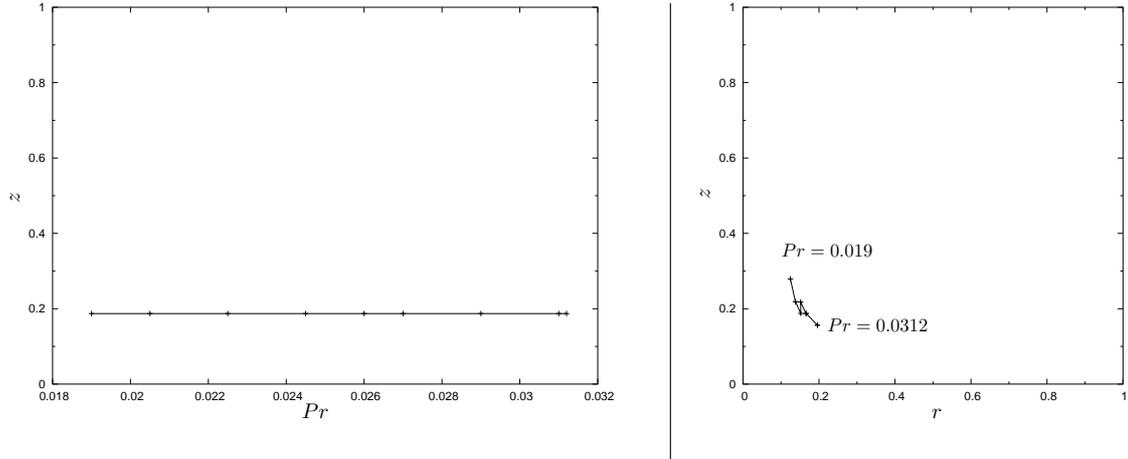


FIG. 5.28 – Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle en température (à gauche) et en rotationnel (à droite) pour $Pr \in [0.019, 0.0312]$

5.7.5 $Pr \in [0.04, 0.1]$, bifurcation de Hopf après la restabilisation

Cette bifurcation de Hopf est observée pour de très grands nombres de Marangoni. Le lieu sensible de l'écoulement critique vis-à-vis de perturbations ponctuelles en température et en vorticité sont représentés sur la figure 5.29.

Les écoulements stationnaires critiques sont plus sensibles à une perturbation ponctuelle en température appliquée en $z_\theta \in [0.49, 0.55]$ et $z_\theta \in [-0.55, -0.49]$. Cette zone est en regard d'une langue de vorticité qui ne provient pas uniquement des points triples, mais est aussi alimentée par une source de vorticité située sur la surface libre due à une baisse locale de la température. Cette langue remonte bien plus haut le long de la surface libre que celles qui ont été observées pour des nombres de Marangoni plus faibles que 250000.

Le lieu de l'écoulement stationnaire le plus sensible à une perturbation en vorticité se situe, invariablement, proche de l'isovaleur nulle de la fonction de courant. Par contre, ce lieu est proche des fronts solides et très en amont de la zone où le taux de croissance de l'énergie cinétique est maximal, tout comme le premier cas où $Pr \in [0.001; 0.0034]$.

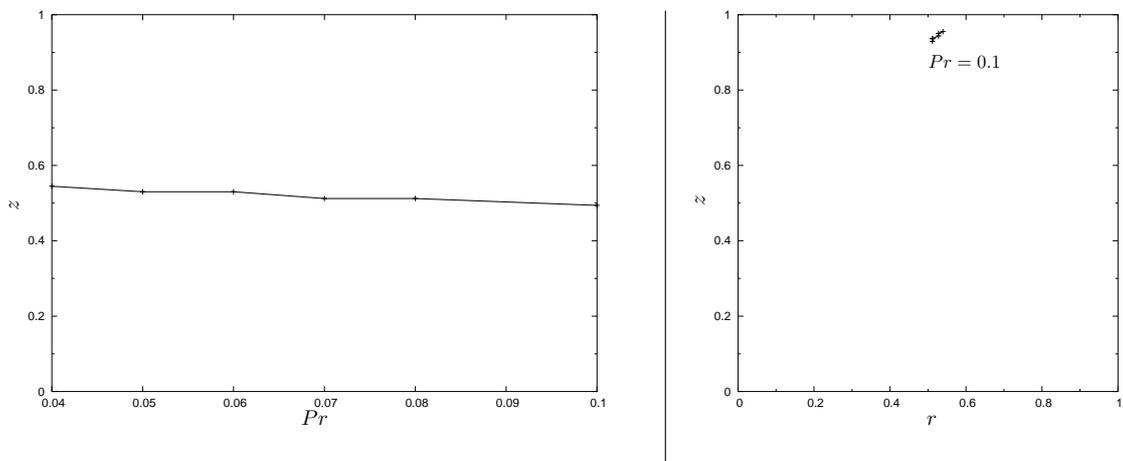


FIG. 5.29 – Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle en température (à gauche) et en rotationnel (à droite) pour $Pr \in [0.04, 0.1]$

5.7.6 $Pr \in [10, \cdot 100]$, bifurcation de Hopf

Les lieux de l'écoulement stationnaire les plus sensibles vis-à-vis de perturbations ponctuelles en températures ou en rotationnel à ces hauts nombres de Prandtl sont représentés sur la figure 5.30.

La cote du lieu de l'écoulement critique le plus sensible vis-à-vis d'une perturbation ponctuelle en température est quasiment constant et vaut $z_{\Theta} \simeq \pm 0.8$. On peut voir sur la température du champ stationnaire à $Pr = 20$ et $Ma = 62100$ (c.f. figure 3.45, page 3.45) qu'à cette hauteur, le champ de température est déformé par la vitesse radiale.

L'écoulement stationnaire est le plus sensible à une perturbation en vorticité ponctuelle en $r_{\Omega} = 0.61$ et $z_{\Omega} = \pm 0.33$. Rien de particulier dans l'écoulement stationnaire ne semble se trouver dans cette zone.

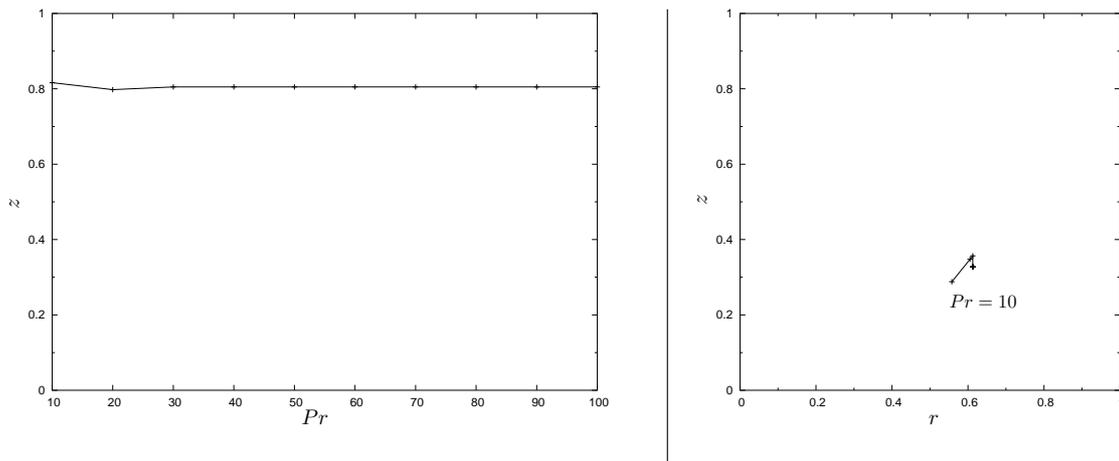


FIG. 5.30 – Lieux de l'écoulement critique sensibles à une perturbation ponctuelle en température (à gauche) et en rotationnel (à droite) pour $Pr \in [10, \cdot 100]$

5.7.7 Discussion

Le lieu de l'écoulement stationnaire critique le plus sensible à une perturbation ponctuelle en température se situe, pour les paramètres que nous avons explorés, toujours sur la surface libre. La cote est très différente selon que le nombre de Prandtl est plus petit ou plus grand que 1, mais, d'un côté comme de l'autre, elle varie très peu sur ces gammes de nombres de Prandtl.

Pour des nombres de Prandtl plus petits que 1, la cote z_{Θ} se situe entre 0.1 et 0.2, et pour les grands nombres de Marangoni, elle peut se situer au dessus de 0.5. La cote est intimement liée à la hauteur à laquelle le bout de la langue de vorticité, qui descend du point triple, remonte le long de la surface libre. Ceci rappelle la condition de stabilité donnée par Fjörtøft [31]. Pour les grands nombres de Prandtl, c'est à la cote $z_{\Theta} = 0.8$ que se trouve un pic de température qui est convecté par le fluide à l'intérieur de l'écoulement.

Le lieu de l'écoulement le plus sensible à une perturbation ponctuelle en vorticité, à faibles nombres de Prandtl, se situe dans la cavité et très proche de l'isovaleur nulle de la fonction de courant. Cette zone se trouve aussi en amont de la zone où le taux d'amplification de l'énergie cinétique est maximal. Les deux perturbations oscillantes ont en commun que leur lieu sensible se trouve près des fronts solides alors que les autres perturbations ont le leur entre l'axe et le plan médian. Pour les grands nombres de Prandtl, le lieu sensible de l'écoulement vis-à-vis d'une perturbation ponctuelle en vorticité se situe au milieu de la cavité, là où rien de particulier ne semble se produire.

Shiomi et Amberg [97] ont entrepris de réduire l'amplitude des oscillations d'un écoulement dans une cuve annulaire différentiellement chauffée. Dans leur dispositif expérimental, le contrôle s'effectue par le chauffage local en deux points de la surface libre et une mesure de la température en deux autres points de la surface libre. L'amplitude des oscillations contrôlée est optimisée par la puissance

du dispositif de chauffage local. Il est apparu qu'au delà d'un certain seuil, le chauffage optimal est proportionnel à la température mesurée sur la surface libre. Dans une configuration plus proche de la nôtre, Shiomi *et al.* [98] ont transposé leur précédente expérience à une configuration de demi-zone de rapport d'aspect unitaire à $Pr = 68$. Dans ce cas, le mode 2 est le mode oscillant dominant et le contrôle linéaire est efficace jusqu'à ce que les non-linéarités soient trop fortes.

Il se peut qu'il y ait un lien entre l'adjoint et les expériences de contrôle d'écoulement menées dans ces configurations de surface libre. Nous avons vu que le chauffage local permet, s'il est bien placé, de déclencher plus rapidement l'instabilité, mais il pourrait éventuellement atténuer une instabilité naissante. Si on considère que les écoulements 3D perturbés, dont les paramètres ne sont pas trop éloignés du seuil, ne sont qu'en première approximation la superposition de l'écoulement axisymétrique et de la perturbation, alors il se pourrait que cette perturbation superposée puisse être atténuée par une perturbation opposée déclenchée par l'application d'une perturbation locale en température.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Lors de ce travail, nous avons étendu l'étude de la stabilité linéaire d'écoulements thermocapillaires en zone-flottante entamée par Chénier [16] à une large gamme de nombres de Prandtl. Ceci a permis de mettre en évidence un comportement complexe de la stabilité de l'écoulement bidimensionnel en zone-flottante. Le seuil de déstabilisation est non monotone en nombre de Prandtl. La déstabilisation peut être de nature stationnaire ou oscillante.

L'étude de cette stabilité vis-à-vis de perturbations 3D a montré une analogie à bas nombres de Prandtl entre les structures des perturbations des écoulements de zone-flottante et de demi-zone ainsi qu'une forte similitude entre les mécanismes provoquant leur déstabilisation. Toutefois les modes de déstabilisation à bas nombres de Prandtl ont des structures dont les propriétés de symétrie dépendent fortement de Pr . A haut nombre de Prandtl, la zone-flottante se déstabilise par un mode oscillant dont le comportement est similaire à celui prédit par des modèles de demi-zone *infinie*. L'utilisation du taux de croissance de l'énergie de la perturbation et des différents termes qui le composent comme outil d'analyse montre que les interprétations sur l'origine des instabilités sont plus ambiguës pour des perturbations bidimensionnelles que pour des perturbations tridimensionnelles. Il reste néanmoins que pour ces dernières, la décomposition du taux de croissance de l'énergie en termes naturels et centrifuges amène à proposer deux mécanismes de déstabilisation.

Pour compléter la compréhension du mécanisme de déstabilisation en configuration bidimensionnelle, nous avons développé un outil localisant les lieux de l'écoulement les plus sensibles à des perturbations locales. Cet outil s'appuie sur la théorie de l'adjoint. Après l'avoir validé, nous l'avons appliqué aux écoulements, aux seuils de déstabilisations, sur la large gamme de nombres de Prandtl investie. Du point de vue de la sensibilité aux perturbations, des points communs ont été observés entre des déstabilisations se trouvant à des nombres de Prandtl très différents. Le critère de Fjørtoft [31], bien qu'étant formulé pour des écoulements laminares non-visqueux, semble s'appliquer en certains endroits de ces écoulements.

Nous avons développé et validé un code de calcul 3D totalement spectral. Les écoulements 3D calculés montrent encore un accord à bas nombre de Prandtl avec la demi-zone. La structure des écoulements non linéaires établis, pour les cas considérés, conserve celle des modes de déstabilisation, aussi bien à bas qu'à hauts nombres de Prandtl.

Les résultats numériques obtenus par méthodes spectrales sont les premiers, dans cette configuration de surface libre, en stabilité linéaire des écoulements stationnaires bidimensionnels vis-à-vis de perturbations 2D et 3D, en adjoint 2D et en calculs d'écoulements 3D.

Parce que l'étude de la stabilité d'écoulements confinés en situation de couplage thermique est un problème délicat de la mécanique des fluides, les perspectives de ce travail sont nombreuses. Le prolongement de l'étude à la stabilité en fonction du rapport d'aspect peut apporter son lot de comparaisons avec la demi-zone pour laquelle de nombreuses études sont disponibles. L'augmentation de la puissance de calcul laisse entrevoir la possibilité de rechercher des solutions stationnaires 3D par méthode de Newton, et ainsi localiser des seuils d'instabilité secondaire, généralement oscillants à bas nombres de Prandtl, et permettre une comparaison avec les observations expérimentales.

L'extension de l'adjoint à la troisième dimension permettrait une comparaison directe avec les résultats obtenus d'une part en zone-flottante et d'autre part en demi-zone pour laquelle beaucoup d'hypothèses sur le mécanisme de déstabilisation ont été formulées. En cas de succès, la généralisation à l'étude de la sensibilité des écoulements purement tridimensionnels serait une des pistes les plus intéressantes. La compréhension du mécanisme de déstabilisation pourrait passer par le développement d'un autre outil, complémentaire de l'adjoint, qui autoriserait la recherche de mécanisme d'amplification locale de perturbations modèles, comme proposé par Lifschitz et Hameiri [69].

Une autre voie pour l'adjoint serait de comprendre dans le cas d'écoulements oscillants le lien entre la perturbation initiale et la phase de la perturbation. Le contrôle des écoulements oscillants fait par Shiomi et Amberg [97] et Shiomi *et al.* [98] pourrait être mieux compris et optimisé.

Plus généralement, la comparaison entre les seuils obtenus par différentes simulations serait grandement facilitée par la conversion des paramètres de contrôle, les nombres de Marangoni et de Reynolds, en paramètres effectifs.

Annexe A

Opérateurs en coordonnées cylindriques

Considérons les quantités scalaire f et vectorielle $\vec{v} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\varphi + w\vec{e}_z$.

Gradient de f :

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Laplacien de f :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Divergence de \vec{v} :

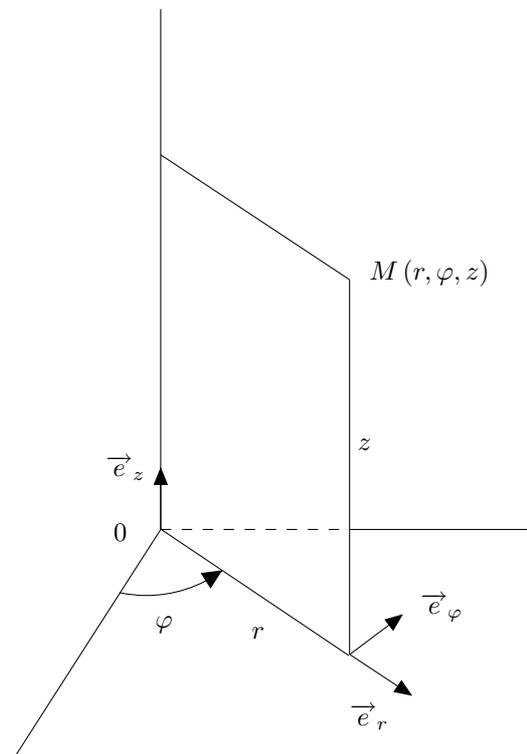
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Rotationnel de \vec{v} :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi \\ &+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial rv}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z\end{aligned}$$

Laplacien de \vec{v} :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{v} &= \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r \\ &+ \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi \\ &+ \Delta w \vec{e}_z\end{aligned}$$



Annexe B

Fonction de courant en géométrie cylindrique axisymétrique bidimensionnelle

B.1 Généralités

La fonction de courant, Ψ , est souvent vue comme représentant par ses isovaleurs la trajectoire des particules d'un écoulement bi-dimensionnel stationnaire d'un fluide incompressible.

Plaçons nous dans les cas où l'écoulement est plan en coordonnées :

- cartésiennes (x, y)
- polaires (r, φ)
- cylindriques axisymétriques bi-dimensionnelles (r, z)

Définissons une base orthogonale (\vec{e}_1, \vec{e}_2) du plan dans lequel le fluide s'écoule. Tout point de ce plan est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2) . La troisième direction est définie par le vecteur $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ dont la coordonnée associée est x_3 .

La manière la plus classique de définir la fonction de courant Ψ est de se servir de la propriété que l'équation de continuité pour un fluide incompressible sous approximation de Boussinesq s'écrit $\text{div } \vec{v} = 0$. Rien de plus naturel que de prendre $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$. Puisque le rotationnel de \vec{A} , potentiel vecteur, doit être bi-dimensionnel, on peut imposer : $\vec{A} = \Psi \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$. Ainsi seule la composante de \vec{A} selon $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ est imposée non nulle.

De plus, comme

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{B.1})$$

alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} &= \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \\ &= -\Delta \vec{A} + \vec{\nabla} \text{div} \vec{A} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Or $\vec{A} = \Psi(x_1, x_2) \vec{e}_3$, donc dans le cas des coordonnées citées plus haut nous avons $\text{div} \vec{A} = 0$.

Donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = -\Delta \vec{A} \quad (\text{B.3})$$

La fonction de courant permet de cette manière de reformuler les équations de Navier-Stokes en variables fonction de courant-vorticité et de s'affranchir de la pression. Tout bon livre de Mécanique des Fluides [39, 57] introduit cette notion, et ceci n'est pas l'objet de cette section.

Nous allons, dans ce qui suit, décrire quelques définitions usuelles de la fonction de courant en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques (r, z) .

B.2 Géométrie cartésienne

En géométrie cartésienne, pour un écoulement stationnaire 2D incompressible de vitesse $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$, la fonction de courant représente habituellement la trajectoire des particules. La fonction de courant Ψ est définie par :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{B.4})$$

et a donc la propriété suivante :

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} \cdot \vec{e}_z = -\Delta \Psi \quad (\text{B.5})$$

et donc le produit scalaire du gradient de la fonction de courant et de la vitesse donne :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Psi &= v_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Donc les trajectoires des particules sont données par les iso-valeurs de la fonction de courant.

L'incompressibilité est-elle assurée avec cette formulation ?

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Donc l'écoulement est bien incompressible.

B.3 Géométrie cylindrique axisymétrique bidimensionnelle

Nous entendons par "géométrie cylindrique axisymétrique bidimensionnelle" l'espace repéré en coordonnées cylindriques (r, φ, z) rapporté au plan (r, z) , le vecteur \vec{v} étant contenu dans ce plan.

Il existe plusieurs définitions de la fonction de courant dans cette géométrie. Nous allons en voir quelques-unes.

B.3.1 Formulation I

Définissons la fonction de courant Ψ_I à l'aide de la vitesse $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_z \vec{e}_z$:

$$v_r = \frac{\partial \Psi_I}{\partial z} \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial r \Psi_I}{\partial r} \quad (\text{B.8})$$

Donc en prenant le rotationnel de \vec{v} :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi &= \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \Psi_I}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_I}{\partial z^2} \\
 &= \frac{\partial^2 \Psi_I}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_I}{\partial r} - \frac{\Psi_I}{r^2} + \frac{\partial^2 \Psi_I}{\partial z^2} \\
 &= \Delta (\Psi_I \vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Pour "l'incompressibilité" :

$$\begin{aligned}
 \text{div} \vec{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_I}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial r \Psi_I}{\partial r} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

La fonction de courant est-elle une représentation de la trajectoire des particules? Calculons le produit scalaire du gradient de la fonction de courant et de la vitesse.

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Psi_I &= v_r \frac{\partial \Psi_I}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Psi_I}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial \Psi_I}{\partial z} \frac{\partial \Psi_I}{\partial r} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial r \Psi_I}{\partial r} \right) \frac{\partial \Psi_I}{\partial z} \\
 &= -\frac{\Psi_I}{r} \frac{\partial \Psi_I}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Donc les iso-valeurs de la fonction de courant ne représentent pas la trajectoire des particules.

B.3.2 Formulation II

Définissons la fonction de courant Ψ_{II} par :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial z} \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r} \tag{B.12}$$

Donc en prenant le rotationnel de \vec{v} :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi &= \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_{II}}{\partial z^2} \\
 &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \Psi_{II}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_{II}}{\partial z^2} \right) \\
 &= \Delta \left(\frac{\Psi_{II}}{r} \vec{e}_\varphi \right) \cdot \vec{e}_\varphi
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Pour "l'incompressibilité" :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_{II}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_{II}}{\partial r \partial z} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

La fonction de courant est-elle une représentation de la trajectoire des particules? Calculons le produit scalaire du gradient de la fonction de courant et de la vitesse.

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Psi_{II} &= v_r \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r} \right) \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial z} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Donc les iso-valeurs de la fonction de courant représentent la trajectoire des particules. Remarquons que $\Psi_{II} = r\Psi_I$.

B.3.3 Discussion

Les différentes formulations, bien qu'elles respectent l'équation $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, ne respectent pas toutes $\operatorname{rot} \vec{v} = \Delta(\Psi \vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi$.

Seule la formulation I respecte cette condition. Mais les iso-valeurs de cette fonction de courant ne sont pas les trajectoires des particules d'un écoulement stationnaire incompressible.

Par contre la formulation II permet d'obtenir une fonction de courant dont les iso-valeurs sont les trajectoires des particules d'un écoulement stationnaire incompressible.

La formulation I devrait être utilisée pour visualiser la fonction de courant des modes propres adjoint. Néanmoins, ce qui nous intéresse avec cette visualisation c'est la valeur de l'intégrale sur le domaine du produit de la fonction de courant (Ψ_I) du mode propre adjoint par la perturbation initiale de l'écoulement stationnaire, le tout modulé par le rayon. Or $\Psi_{II} = r\Psi_I$, il est donc naturel de représenter aussi la fonction de courant du mode propre adjoint avec la formulation II.

Annexe C

Méthodes spectrales

Les méthodes spectrales consistent à décomposer une fonction solution d'un problème sur une base de fonctions. Les fonctions de base qui sont utilisées dans ce mémoire sont les polynômes de Chebyshev et les fonctions trigonométriques pour une décomposition en série de Fourier. Si les séries de Fourier sont bien connues, les polynômes de Chebyshev le sont moins. Néanmoins ce qui suit est un aperçu rapide de ce que sont les polynômes de Chebyshev, de nombreux ouvrages [12, 8, 82] contiennent des informations plus complètes sur ces polynômes.

Le polynôme de Chebyshev T_n de degré n est défini sur l'intervalle $[-1, 1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n : \begin{array}{l} [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longrightarrow \cos(n \arccos(x)) \end{array}$$

Et le produit scalaire pour lequel la base est orthonormale est défini par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (T_i, T_j) = \int_{-1}^1 T_i(x) T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (T_i, T_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n \text{ et } m > 0 \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \end{cases}$$

Soit une fonction scalaire f et \check{f} sa projection sur la base orthogonale de polynômes de Chebyshev de dimension $N + 1$.

$$f : \begin{array}{l} [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$$

Nous avons :

$$\check{f}(x) = \sum_{i=0}^N \check{f}_i T_i(x)$$

Avec :

$$\check{f}_i = \frac{(f, T_i)}{(T_i, T_i)}$$

que nous approchons grâce à la formule de quadrature pour l'intégration de Gauss sur les polynômes de Chebyshev d'ordre N au plus. Nous pouvons ainsi définir une famille $(x_i)_{i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ de réels (points de collocation) bien choisis sur l'intervalle $[-1, 1]$ et une famille de poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ telles que :

$$\check{f}_i = \sum_{i=0}^N f(x_i) T(x_i) w_i$$

La fonction \check{f} est ainsi égale à f aux points de collocation x_i avec une erreur qui varie en $\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{N}\right)^N\right)$ sur le reste de l'intervalle.

Nous choisissons de discrétiser le domaine de calcul par les points de collocation de Gauss-Radau (C.1), ramenés sur $]0, 1]$, dans la direction radiale, et les points de Gauss-Lobatto (C.2) dans la direction axiale. Les points de Gauss-Radau ont l'avantage de ne pas inclure le point -1 , ce qui nous permet d'éviter d'avoir à gérer la singularité présente sur l'axe lorsque les points de Gauss-Radau sont ramenés sur l'intervalle $]0, 1]$.

Intégration de Gauss-Radau :

$$\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad x_i = \cos\left(\frac{2j}{2N+1}\pi\right) \quad (\text{C.1})$$

$$w_0 = \frac{\pi}{2N+1}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad w_i = \frac{2\pi}{2N+2}$$

Intégration de Gauss-Lobatto :

$$\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad x_i = \cos\left(\frac{j}{N}\pi\right) \quad (\text{C.2})$$

$$w_0 = \frac{\pi}{2N}, \quad w_N = \frac{\pi}{2N}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad w_i = \frac{2\pi}{N}$$

Intégration

Nous disposons d'une fonction $f(r, z)$ connue sur le support (r_i, z_j) des points de Gauss-Radau dans la direction radiale et Gauss-Lobatto dans la direction axiale. Nous voulons évaluer numériquement avec une précision spectrale l'intégrale de f sur le domaine $\overline{\mathcal{D}}$.

Nous noterons l'intégrale numérique par le symbole \int . L'intégrale approchée de f connue sur les points de collocation est donc $\int f \equiv \int \check{f} = \int \sum_{i=0}^N \check{f}_i T_i(x)$.

Nous noterons :

$$\begin{aligned} \int \int_{\overline{\mathcal{D}}} f d^2s &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 f(r_i, z_j) r_i dr_i dz_j \\ &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 \sum_{i=0}^N \check{f}_{i,j} r T_i(2r-1) T_j(2z/A) dr dz \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

La seconde notation est certainement abusive, avec les éléments différentiels dr_i et dz_j , mais elle est bien utile comme intermédiaire de calcul.

Annexe D

Bilans énergétiques : détail des calculs

Soient le volume \mathcal{V} et les surfaces \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 et \mathcal{S} définis par :

$$\begin{aligned} (\forall M(r, \varphi, z) \in \mathcal{V}) &\Leftrightarrow ((r, \varphi, z) \in [0, R] \times [0, 2\pi] \times [-H/2, H/2]) \\ (\forall M(r, \varphi, z) \in \mathcal{S}_1) &\Leftrightarrow ((r, \varphi, z) \in \{1\} \times [0, 2\pi] \times [-H/2, H/2]) \\ (\forall M(r, \varphi, z) \in \mathcal{S}_2) &\Leftrightarrow ((r, \varphi, z) \in [0, R] \times [0, 2\pi] \times \{-H/2, H/2\}) \\ (\forall M(r, \varphi, z) \in \mathcal{S}) &\Leftrightarrow ((r, \varphi, z) \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \end{aligned}$$

D.1 Energie cinétique

Le bilan d'énergie cinétique exprimé avec l'équation (2.38) est :

$$\dot{E}_c = \int_{\varphi} \int_r \int_z \left(\vec{u} \cdot \left(-(\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 - \vec{\nabla} p + d_q \Delta \vec{u} \right) - \frac{U_0 v_z^2}{r} \right) r dr dz d\varphi$$

chacun des termes composant l'intégrale sera simplifié en utilisant les propriétés des opérateurs différentiels et les propriétés de l'écoulement sur la frontière, avec les conditions aux limites, ou sur le volume, avec la divergence :

Calcul de $\int_{\varphi} \int_r \int_z \vec{u} \cdot (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} r dr dz d\varphi :$

Le terme à intégrer se décompose sous la forme :

$$\vec{u} \cdot (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{2} (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\|\vec{u}\|^2 \vec{U}_0) \quad \text{car } \vec{\nabla} \cdot \vec{U}_0 = 0$$

L'incompressibilité de l'écoulement stationnaire permet d'exprimer le terme à intégrer à la manière d'une divergence. Etant donné que l'intégrale volumique d'une divergence est égale à une intégrale surfacique selon le théorème de Green-Ostrogradski, l'intégrale va pouvoir être simplifiée grâce aux propriétés du champ de vitesse de l'écoulement stationnaire sur les bords. Ceci nous amène à calculer :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{u} \cdot (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} d^3v = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\|\vec{u}\|^2 \vec{U}_0) d^3v = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{S}} \|\vec{u}\|^2 \vec{U}_0 d\vec{s} = 0$$

car $\vec{U}_0 \perp d\vec{s}$

□

Calcul de $\int_{\varphi} \int_r \int_z \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 r dr dz d\varphi :$

La seule simplification apportée à cette intégrale est la réduction du nombre de variables d'intégration en faisant disparaître la direction azimutale. Celle ci se retrouve néanmoins dans le facteur c_k , défini à la page 28, devant ce qui reste de l'intégrale. Ce reste n'est autre que l'explicitation du terme à intégrer.

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 d^3v = c_k \int_r \int_z \left(u^2 \frac{\partial U_0}{\partial r} + uw \left(\frac{\partial U_0}{\partial z} + \frac{\partial W_0}{\partial r} \right) + w^2 \frac{\partial W_0}{\partial z} \right) r dz dr$$

□

Calcul de $\int_{\varphi} \int_r \int_z \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p \, r \, dr \, dz \, d\varphi$:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p \, d^3v &= \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \, d^3v && \text{car } \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (p \vec{u}) \, d^3v \\ &= \oint_{\mathcal{S}} p \vec{u} \, d\vec{s} \\ &= 0 && \text{car } \vec{u} \perp d\vec{s} \end{aligned}$$

□

Calcul de $\int_{\varphi} \int_r \int_z \vec{u} \cdot \Delta \vec{u} \, r \, dr \, dz \, d\varphi$:

Pour calculer cette intégrale, il sera utile de décomposer le terme à intégrer de la manière suivante :

$$\vec{u} \cdot \Delta \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}) - (\vec{\nabla} \times \vec{u})^2$$

Ce qui, une fois remplacé dans l'intégrale, nous donne deux termes à calculer :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{u} \cdot \Delta \vec{u} \, d^3v = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}) - (\vec{\nabla} \times \vec{u})^2 \, d^3v$$

Calcul de $\iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}) \, d^3v$:

Le théorème de Green-Ostrogradski va encore servir ici en remplaçant l'intégrale de volume par une intégrale de surface. Ceci nous amène à calculer le double produit vectoriel :

$$\vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \sin^2(k\varphi) & - w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \cos^2(k\varphi) \\ -w \left(\frac{k}{r} w + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(k\varphi) \sin(k\varphi) & - u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} + \frac{k}{r} u \right) \cos(k\varphi) \sin(k\varphi) \\ u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \cos^2(k\varphi) & - v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \sin^2(k\varphi) \end{pmatrix}$$

et à l'utiliser dans l'intégrale de surface sur la surface \mathcal{S} et d'élément différentiel $d\vec{s}$ orienté vers l'extérieur. Sur la surface \mathcal{S}_1 seul u est nul, et sur la surface \mathcal{S}_2 les termes u , v et w sont nuls. Rappelons que v est nul lorsque $k = 0$ et que les intégrales entre 0 et 2π de $\cos^2 k\varphi$ et $\sin^2 k\varphi$ valent toutes les deux π pour k non nul. L'intégrale se ramène donc à :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}) \, d^3v &= \oint_{\mathcal{S}} \vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} \, d\vec{s} \\ &= \oint_{\mathcal{S}_2} \vec{0} \, d\vec{s} + \oint_{\mathcal{S}_1} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \sin^2(k\varphi) + w \frac{\partial w}{\partial r} \cos^2(k\varphi) \right)_{r=1} ds \\ &= c_k \int_z \left(\frac{v}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=1} dz \end{aligned}$$

◇

Calcul de $\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \times \vec{u})^2 \, d^3v$:

Le calcul de cette intégrale ne se simplifie pas. Il suffit d'exprimer le terme à intégrer et de réduire le nombre de variables d'intégration de trois à deux. Nous effectuons l'intégration selon la direction azimutale, donc la variable φ disparaît au profit du facteur c_k , ce qui aboutit à :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \times \vec{u})^2 d^3v = c_k \int_r \int_z \left(\frac{k}{r} w + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial rv}{\partial r} + \frac{k}{r} u \right)^2 rdzdr$$

◇

□

Le bilan d'énergie cinétique se décompose en plusieurs intégrales qui correspondent toutes à des mécanismes de transfert énergétique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_c}{\partial t} = & -c_k \int_r \int_z \underbrace{\frac{U_0 v^2}{r}}_{I_{v1}} + \underbrace{u^2 \frac{\partial U_0}{\partial r}}_{I_{v2}} + \underbrace{uw \frac{\partial U_0}{\partial z}}_{I_{v3}} + \underbrace{uw \frac{\partial W_0}{\partial r}}_{I_{v4}} + \underbrace{w^2 \frac{\partial W_0}{\partial z}}_{I_{v5}} rdzdr \\ & + d_q c_k \int_z \underbrace{\left(v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v^2}{r} \right)_{r=1}}_{M_\varphi} + \underbrace{\left(w \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=1}}_{M_z} dz \\ & - \underbrace{d_q c_k \left(\int_r \int_z \left(\frac{k}{r} w + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial rv}{\partial r} + \frac{k}{r} u \right)^2 rdzdr - 2 \int_z \left(\frac{v^2}{r} \right)_{r=1} dz}_{D} \end{aligned}$$

D.2 Energie thermique

Le bilan d'énergie thermique est, de la même manière que pour le bilan d'énergie cinétique, l'intégrale sur le volume de l'équation 2.43 :

$$\dot{E}_\theta = \int_\varphi \int_r \int_z \theta_c \left(-(\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \theta_c - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0 + d_T \Delta \theta_c \right) r dr dz d\varphi$$

Cette intégrale est décomposée en plusieurs termes qui seront calculés séparément.

Calcul de $\int_\varphi \int_r \int_z \theta_c (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \theta_c r dr dz d\varphi$:

L'incompressibilité de l'écoulement stationnaire, le théorème de Green-Ostrogradski et les propriétés du champ de vitesse de l'écoulement stationnaire sur les bords permettent de simplifier l'intégrale :

$$\theta \cdot (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \theta = \frac{1}{2} (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \theta^2 = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\theta^2 \vec{U}_0) \quad \text{car } \vec{\nabla} \cdot \vec{U}_0 = 0$$

l'intégrale à calculer devient :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \theta_c \cdot (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \theta_c d^3v &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\theta^2 \vec{U}_0) d^3v \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{S}} \theta^2 \vec{U}_0 \cdot d\vec{s} \\ &= 0 \quad \text{car } \vec{U}_0 \perp d\vec{s} \end{aligned}$$

□

Calcul de $\int_\varphi \int_r \int_z \theta_c (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0 r dr dz d\varphi$:

Le calcul de cette intégrale ne se simplifie pas, ce qui donne :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \theta_c \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Theta_0 d^3v = c_k \int_r \int_z \left(\theta u \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \theta w \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \right) rdzdr$$

□

Calcul de $\int_{\varphi} \int_r \int_z \theta_c \Delta \theta_c r dr dz d\varphi$:

Cette intégrale de volume est transformée en intégrale de surface. Elle est ensuite simplifiée sur les parties de cette surface déjà décrites dans le détail des calculs sur le bilan d'énergie cinétique.

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\mathcal{V}} \theta_c \Delta \theta_c d^3v &= \oint_{\mathcal{S}} (\theta_c \vec{\nabla} \theta_c) d\vec{s} - \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \theta)^2 d^3v \\
 &= \oint_{\mathcal{S}_1} (\theta_c \vec{\nabla} \theta_c) d\vec{s} + \oint_{\mathcal{S}_2} (\theta_c \vec{\nabla} \theta_c) d\vec{s} - \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \theta_c)^2 d^3v \\
 &= \oint_{\mathcal{S}_1} (\theta_c \times 0) d\vec{s} + \oint_{\mathcal{S}_2} (0 \times \vec{\nabla} \theta_c) d\vec{s} - \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \theta_c)^2 d^3v \\
 &= - \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \theta_c)^2 d^3v
 \end{aligned}$$

□

Finalement, le taux de croissance de l'énergie thermique se décompose selon différents termes de transfert d'énergie, allant l'écoulement stationnaire vers la perturbation :

$$\frac{\partial \dot{E}_T}{\partial t} = -c_k \int_r \int_z \left(\underbrace{\theta u \frac{\partial \theta_0}{\partial r}}_{I_{T1}} + \underbrace{\theta w \frac{\partial \theta_0}{\partial z}}_{I_{T2}} \right) r dz dr - \underbrace{d_T \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \theta)^2 d^3v}_{D_T}$$

$$\frac{\partial \dot{E}_T}{\partial t} = -D_T + \underbrace{I_{T1} + I_{T2}}_{I_T}$$

Annexe E

Résultats de convergence en maillage et régularisation de différents écoulements

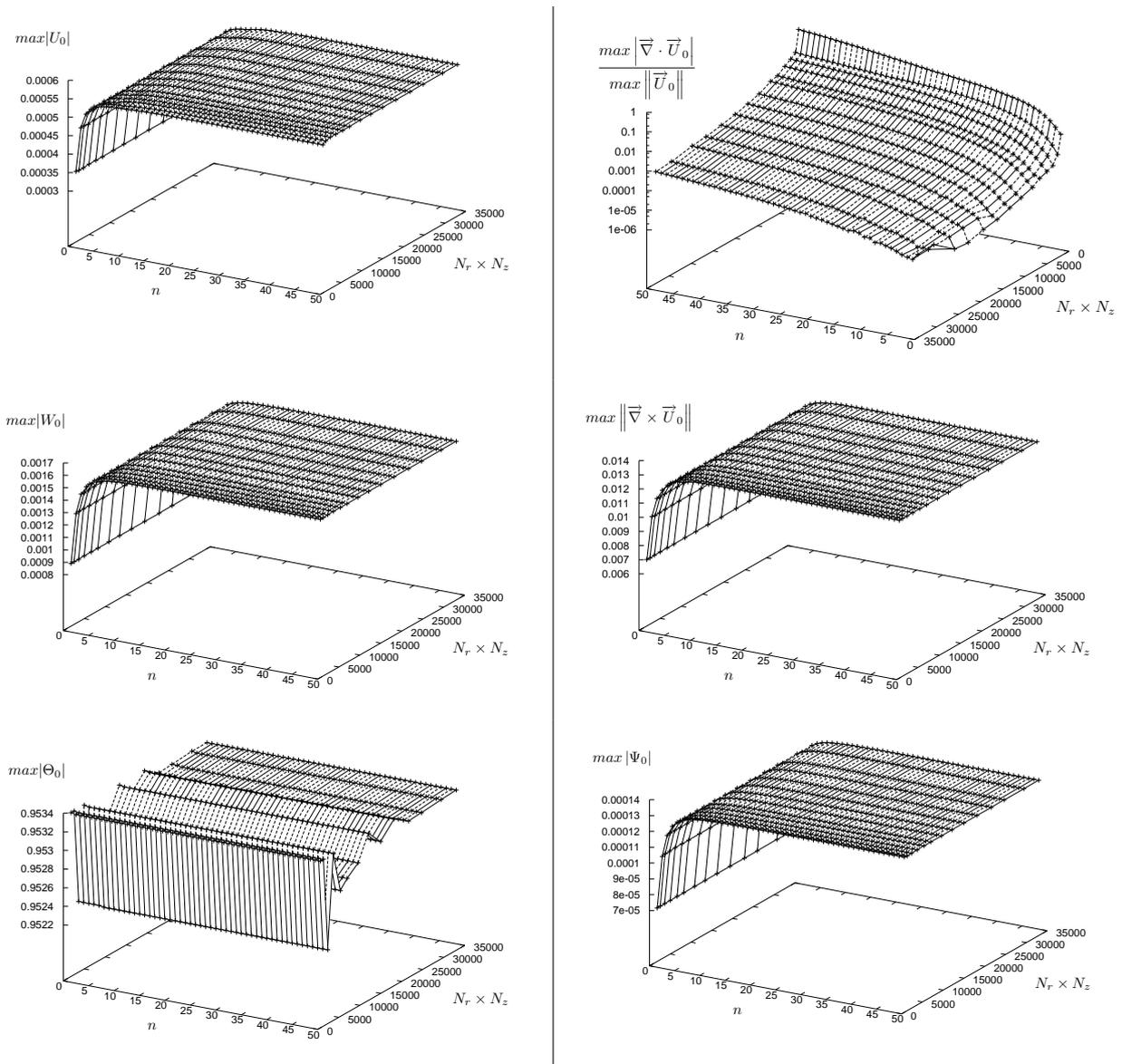


FIG. E.1 – Comportement des maxima des variables principales du champ stationnaire à $Re = 10^{-2}$, $Ma = 10^{-2}$ ($Pr = 1$) en fonction de la régularisation n et du nombre de mailles $N_r \times N_z$

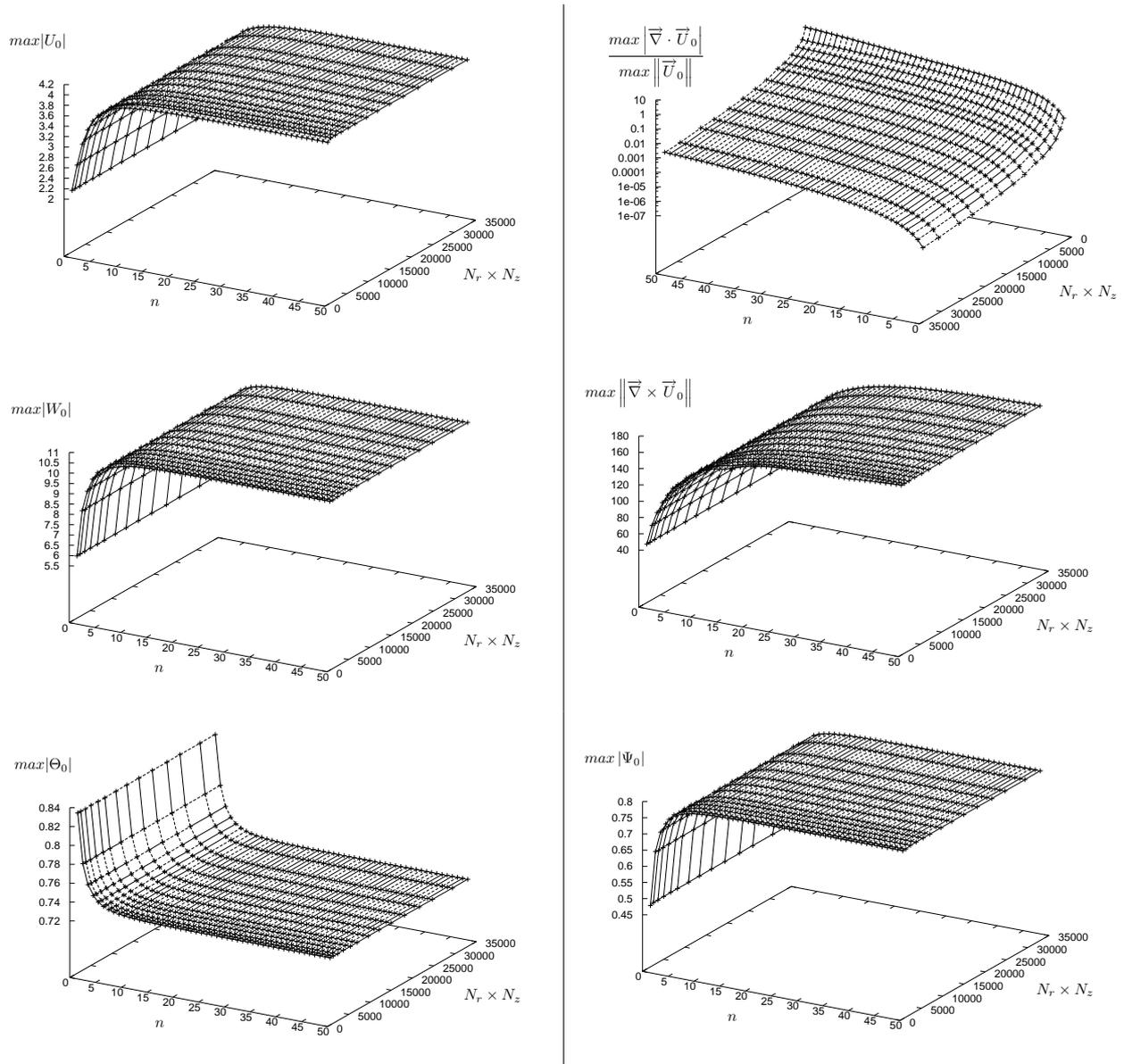


FIG. E.2 – Comportement des maxima des variables principales du champ stationnaire à $Re = 10^{-2}$, $Ma = 10^2$ ($Pr = 10^4$) en fonction de la régularisation n et du nombre de mailles $N_r \times N_z$.

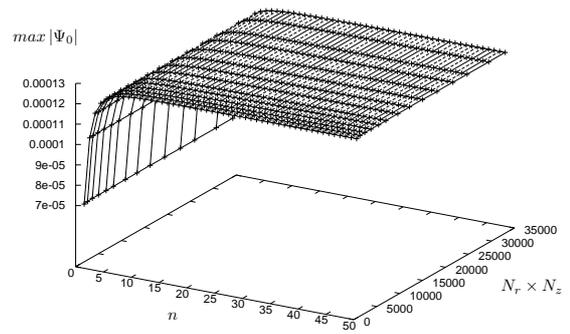
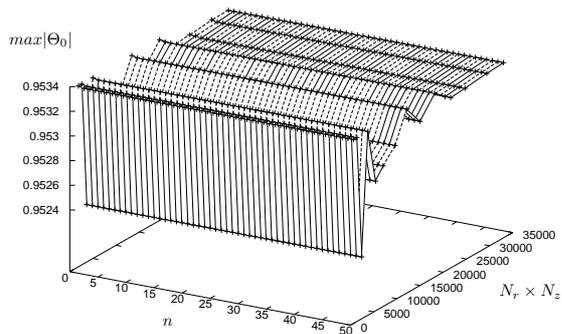
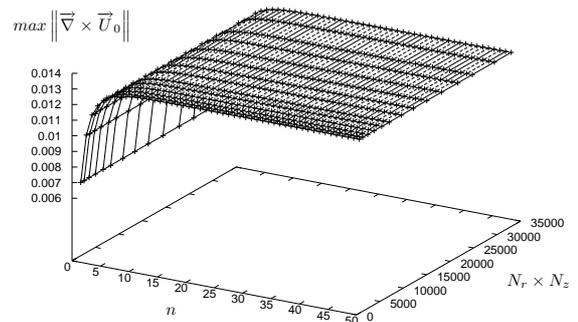
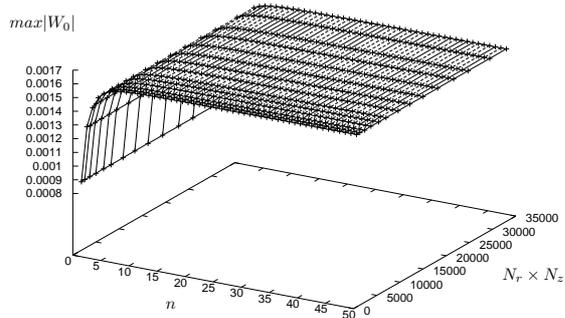
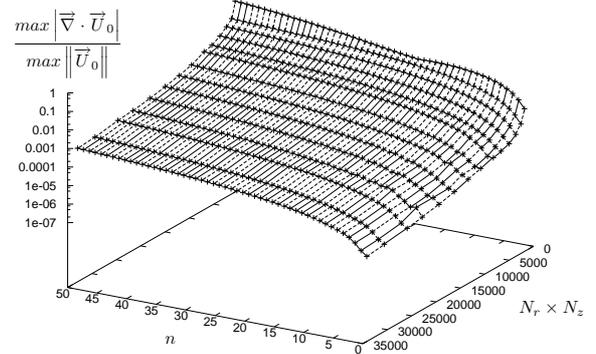
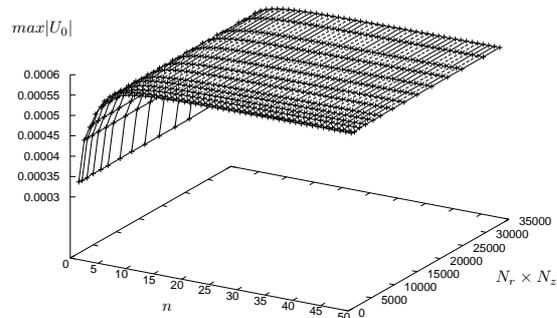


FIG. E.3 – Comportement des maxima des variables principales du champ stationnaire à $Re = 10^2$, $Ma = 10^{-2}$ ($Pr = 10^{-4}$) en fonction de la régularisation n et du nombre de mailles $N_r \times N_z$.

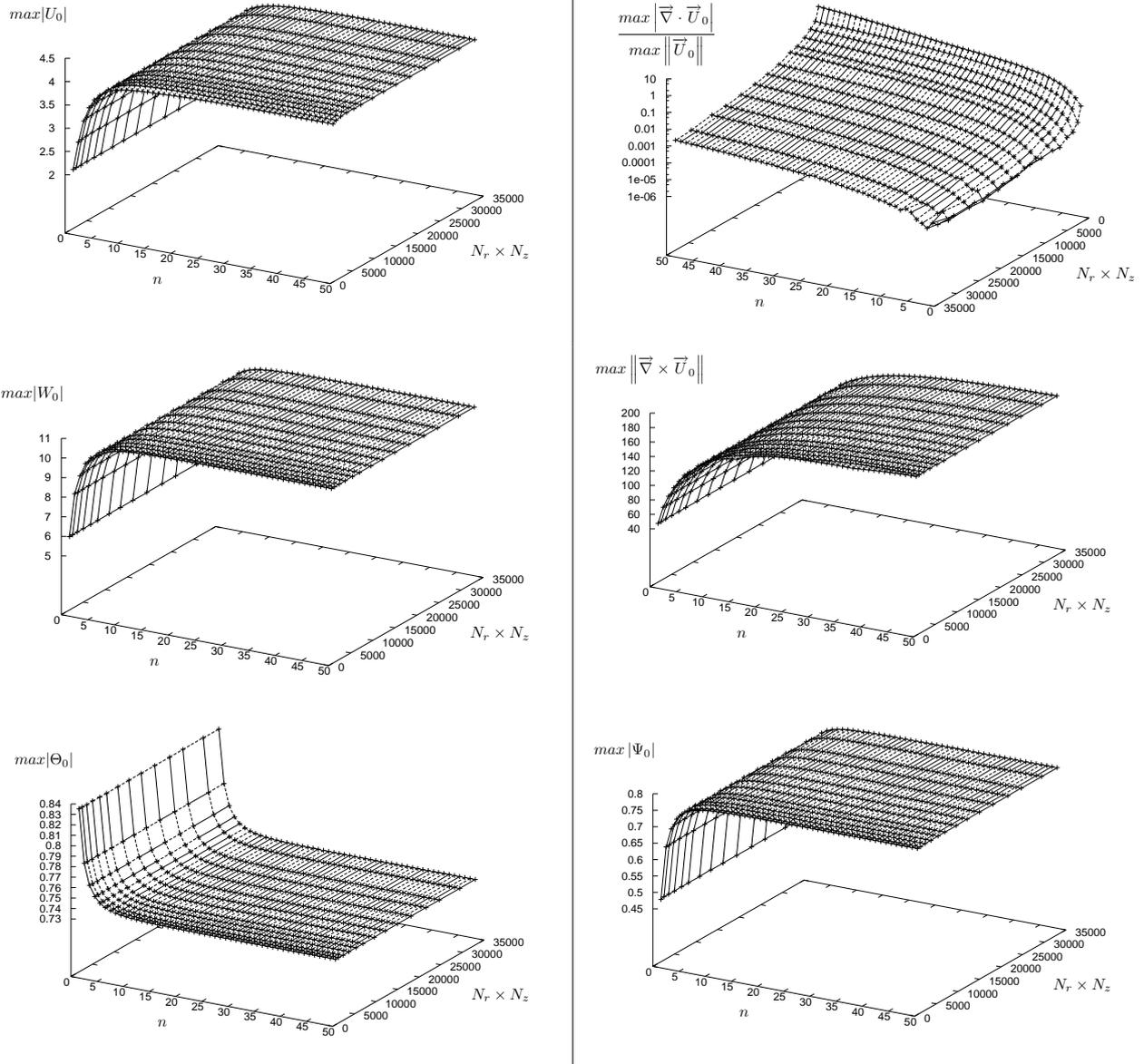


FIG. E.4 – Comportement des maxima des variables principales du champ stationnaire à $Re = 10^2$, $Ma = 10^2$ ($Pr = 1$) en fonction de la régularisation n et du nombre de mailles $N_r \times N_z$.

Annexe F

Seuils d'instabilité

Restabilisation								
<i>Pr</i>	<i>Ma</i>	ω_c	<i>Pr</i>	<i>Ma</i>	ω_c	<i>Pr</i>	<i>Ma</i>	ω_c
0.001	53.85	4.3549	0.020	231		0.03117	3000	
0.002	124.8	8.648	0.030	1025		0.03100	3260	
0.003	226.0	12.913	0.031	1464		0.03000	4286	
0.0031	240.5	13.4	0.03105	1500		0.02900	5000	
0.0032	253.6	13.8	0.03149	2000		0.02760	6000	
0.0035	293.7		0.0400	267469	154.6	0.02597	7000	
0.004	355.1		0.0500	263665	163.0	0.02425	8000	
0.005	540.4		0.0600	265903	172.9	0.02246	9000	
0.006	677.2		0.0700	272431	184.1	0.02074	10000	
0.007	726.8		0.0800	282505	196.5	0.01908	11000	
0.008	566.0		0.0900	295906	210.0			
0.00855	275.1		0.1000	312522	224.9			
0.00865	175.2		9	149037	125.3			
0.00870	157.6		10	92576	108.6			
0.00875	147.2		20	62040	111.4			
0.00880	139.7		30	59087	116.1			
0.00885	134.4		40	58013	118.9			
0.00890	129.9		50	57475	120.7			
0.00895	126.0		60	57157	121.9			
0.009	123.5		70	56949	122.8			
0.0095	108.5		80	56803	123.0			
0.010	104.4		90	56696	124.0			
0.012	101.7		100	56614	124.0			
0.0159	150.0							

TAB. F.1 – Seuils d'instabilité du mode 0

Pr	Ma	ω_c	Pr	Ma	ω_c	Pr	Ma	ω_c
0.001	1.4272	0.020201	0.1	2070	8.089	6	51657	79.295
0.002	2.8800	0.040290	0.2	3890	14.609	7	51105	79.474
0.009	14.026	0.18420	0.3	6949	20.602	8	49836	79.318
0.010	15.846	0.20517	0.4	10626	25.947	9	48254	79.162
0.012	19.54	0.24680	0.5	14244	30.392	10	46630	79.125
0.015	25.48	0.31120	0.6	17533	34.053	20	37468	82.331
0.020	36.80	0.42056	0.7	20464	37.159	30	34657	85.238
0.030	66.70	0.65870	0.8	23071	39.896	40	33435	87.116
0.031	70.42	0.68463	0.9	25400	42.395	50	32775	88.388
0.032	74.32	0.71080	1	27486	44.723	60	32369	89.300
0.040	113.60	0.94370	2	39961	61.729	70	32097	89.985
0.050	179.59	1.2262	3	45770	70.805	80	31903	90.516
0.060	317.29	1.7026	4	49241	75.759	90	31759	90.939
0.070	951.24	3.2718	5	51126	78.283	100	31647	91.286

TAB. F.2 – Seuils d'instabilité du mode 1

Pr	Ma	ω_c	Pr	Ma	ω_c	Pr	Ma	ω_c
0.001	1.298		0.088	930.50		0.7	40351	50.56
0.002	2.620		0.100	1087		0.8	45793	54.06
0.009	12.74		0.110	1236		0.9	50513	56.96
0.010	14.28		0.120	1397		1	54252	59.32
0.020	32.90		0.130	1573		2	63150	73.87
0.030	59.04		0.140	1761		3	69180	79.18
0.031	62.29		0.150	1938		4	75338	81.98
0.032	65.69		0.200	3173		5	79527	83.55
0.040	97.81		0.300	6970		6	81571	84.54
0.041	102.98		0.400	18478		7	82252	85.43
0.042	108.54		0.42	23343	37.63	8	82133	86.33
0.047	142.90		0.44	24646	38.73	9	81617	87.26
0.048	151.57		0.46	25928	39.79	10	80930	88.19
0.082	861.76		0.48	27193	40.82	20	74956	95.59
0.084	885.84		0.5	28445	41.83	100	68978	108.3
0.085	897.50		0.6	34519	46.48			

TAB. F.3 – Seuils d'instabilité du mode 2

Annexe G

Méthode d'Arnoldi

Un écoulement stationnaire peut être dans un équilibre stable ou instable. Pour le savoir, il suffit de le perturber avec une perturbation infinitésimale et d'observer son évolution. Si l'écoulement ne revient pas à son état initial pour y rester, alors il est instable. L'inconvénient de cette méthode est qu'il peut s'écouler un certain temps avant d'observer une déstabilisation de l'écoulement comme l'a observé Kasperski [51] pour déterminer son critère de convergence temporel.

Un moyen de déterminer la stabilité du système est de suivre l'évolution d'une perturbation \mathbf{u} d'un écoulement stationnaire \mathcal{U}_0 . Le système (2.20-2.22) à la page 22 décrit l'évolution temporelle d'une perturbation de l'écoulement de base \mathcal{U}_0 . Ce système linéaire, que l'on peut noter $\partial_t \mathbf{u} = \mathcal{L}\mathbf{u}$, admet comme solution :

$$\mathbf{u}(t) = \exp(\mathcal{L}t) \mathbf{u}(t=0)$$

Chénier [16] a appliqué la méthode d'Arnoldi [2] en suivant l'idée de Mamun et Tuckerman [73]. L'idée est de calculer la valeur propre dominante grâce au calcul de l'évolution temporelle $\mathbf{u}(n\delta t)$ d'une perturbation, δt étant le pas de temps. Un opérateur linéaire H de dimension m , exprimé sous forme matricielle, est extrait de l'opérateur \mathcal{L} à partir de l'orthonormalisation du m -uplet $(\mathbf{u}(n\delta t), \mathbf{u}((n+1)\delta t), \dots, \mathbf{u}((n+m-1)\delta t))$. Les valeurs propres de H sont utilisées pour approcher les valeurs propres dominantes de l'opérateur \mathcal{L} .

Soit λ_i une valeur propre de H associée au vecteur propre \mathbf{u}_i . Le schéma temporel utilisé pour déterminer λ_i nous donne pour une perturbation initiale valant $\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_i$: $\mathbf{u}(\delta t) = \lambda_i \mathbf{u}_i$.

Avec Λ_i une valeur propre de l'opérateur \mathcal{L} , le calcul analytique donne $\mathbf{u}(\delta t) = \exp(\Lambda_i \delta t) \mathbf{u}_i$. Il s'ensuit que :

$$\Re(\Lambda_i) = \frac{\ln |\lambda_i|}{\delta t}$$
$$\Im(\Lambda_i) = \frac{1}{\delta t} \arctan \left(\frac{\Im(\lambda_i)}{\Re(\lambda_i)} \right)$$

Plus concrètement :

Ce qui suit provient du livre de Saad [91].

Soit m le nombre de vecteurs propres de \mathcal{L} à déterminer. La procédure d'Arnoldi consiste à créer à partir d'un vecteur \mathbf{v} le sous espace de Krylov $\mathcal{K}^m(\mathcal{L}, \mathbf{v})$ qui est généré par la famille de vecteurs $\{\mathbf{v}, \mathcal{L}\mathbf{v}, \mathcal{L}^2\mathbf{v}, \dots, \mathcal{L}^{m-1}\mathbf{v}\}$. Cette famille génératrice est orthonormalisée. Il en est extrait une matrice de Hessenberg H de dimension $m \times m$ qui est diagonalisée. Si le résidu calculé est en dessous du critère de convergence, alors les valeurs propres et vecteurs propres de H mènent aux valeurs propres et vecteurs propres de \mathcal{L} .

L'algorithme d'Arnoldi, pour calculer la première valeur propre λ_1 , peut être décrit comme suit :

```
1    $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 
2   for  $j = 1, 2, \dots, m$  do
3      $\mathbf{w} = \mathcal{L}\mathbf{v}_j$ 
4     for  $i = 1, 2, \dots, j$  do
5        $h_{i,j} = (\mathbf{w}|\mathbf{v}_i)$ 
6        $\mathbf{w} = \mathbf{w} - h_{i,j}\mathbf{v}_i$ 
7     end for
8      $h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}\|$ 
9     if  $h_{j+1,j} = 0$  STOP
10     $\mathbf{v}_j = \mathbf{w}/h_{j+1,j}$ 
11  end for
12  diagonalisation de  $H = (h_{i,j})$  et obtention des valeurs propres ordonnées par partie réelle  $\lambda_i$ 
    décroissante et vecteurs propres  $y_i$  associés et  $V$  la matrice telle que  ${}^tV\mathcal{L}V = H$ 
13  if  $h_{m+1,m}|y_1(m)| < \text{critère}$  STOP ,  $y_1(m)$  est la dernière composante du vecteur colonne  $y_1$ 
14   $\mathbf{v}_1 = Vy_1$ 
15  goto 2
```

Le critère de convergence utilisé n'est pas toujours un indicateur suffisant pour déterminer la précision du mode propre $(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$. Un calcul de précision *a fortiori* est nécessaire. On pourrait se servir du calcul de l'erreur sur les bilans d'énergie pour déterminer cette précision.

Références

- [1] A.V. Anilkumar, R.N. Grugel, S.X.F. Hen, C.P. Lee et T.G. Wang. *Control of thermocapillary convection in a liquid bridge by vibration*. J. Appl. Physics, **73**(9) : 4165–4170, may 1993.
Citation à la page 7.
- [2] W.E. Arnoldi. *The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem*. Q. Appl. Math, **9**(17) : 17–29, 1951.
Citations aux pages 27 et 155.
- [3] J. Barthel, K. Eichler, M. Jurisch et W. Löser. *On the significance of surface tension driven flow in floating zone melting experiments*. Krist. Tech., **14** : 637–644, 1979.
Citation à la page 4.
- [4] A. Batoul, H. Khallouf et G. Labrosse. *Une méthode de résolution directe (pseudospectrale) du problème de Stokes 2D/3D instationnaire. Application à la cavité entraînée carrée*. C. R. Acad. Sci., **IIB**(319) : 1455–1461, 1994.
Citations aux pages 11 et 24.
- [5] A. Batoul. *Simulation numérique d'écoulements thermocapillaires en croissance cristalline*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI, jan. 1995.
Citations aux pages 11, 13, 15, 17, et 24.
- [6] B. Bayly. *Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two dimensional flows*. Phys. Fluids, **31**(1) : 56–64, 1988.
Citations aux pages 14, 35, et 84.
- [7] J. Boussinesq. *Théorie Analytique de la Chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie Mécanique de la Lumière*. Gauthier-Villars, 1903.
Citations aux pages 16 et 17.
- [8] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Number 49 in Lecture Notes in Engineering. Springer-Verlag, 1989.
Citations aux pages 23 et 143.
- [9] R.P. Brent. *Algorithms for Minimization Without Derivatives*. Prentice-Hall, 1973.
Citations aux pages 8 et 37.
- [10] D.G. Cacuci. *Sensitivity theory for nonlinear systems. I. Nonlinear functional analysis approach*. J. Math. Phys., **22**(12) : 2794–2802, 1981.
Citation à la page 103.
- [11] T. A. Campbell et J. N. Koster. *Radioscopic visualization of indium antimonide growth by the vertical Bridgman-Stockbarger technique*. J. Crystal Growth, **147** : 408–410, 1995.
Citation à la page 5.
- [12] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni et T.A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1988.
Citations aux pages 23 et 143.
- [13] Q.S. Chen et W.R. Hu. *Numerical investigation on a simulation model of floating zone convection*. Int. J. Heat Mass Tranfert, **40** : 757–763, 1997.
Citation à la page 9.

- [14] Q.S. Chen et W.R. Hu. *Influence of liquid bridge volume on instability of floating half zone convection*. Int. J. Heat Mass Transfer, **41** : 825–837, 1998.
Citation à la page 9.
- [15] Q.S. Chen, W.R. Hu et V. Prasad. *Effect of liquid bridge volume on the instability in small-Prandtl-number half zones*. J. Crystal Growth, **203** : 261–268, 1999.
Citation à la page 9.
- [16] E. Chénier. *Etude de la stabilité linéaire des écoulements thermocapillaires et thermogravitationnels en croissance cristalline*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI, dec. 1997.
Citations aux pages 1, 12, 13, 15, 17, 18, 27, 37, 40, 58, 135, et 155.
- [17] E. Chénier, C. Delcarte et G. Labrosse. *Solutions multiples thermocapillaires en zone flottante à gravité nulle*. Eur. Phys. J. AP, **2** : 93–97, 1998.
Citations aux pages 11, 13, 46, et 56.
- [18] E. Chénier, C. Delcarte et G. Labrosse. *Stability of the axisymmetric buoyant-capillary flows in a laterally heated liquid bridge*. Phys. Fluids, **11**(3) : 527–541, 1999.
Citation à la page 11.
- [19] E. Chénier, C. Delcarte, G. Kasperski et G. Labrosse. *Sensitivity of the liquid bridge hydrodynamics to local capillary contributions*. Phys. Fluids, **14** : 3109–3117, 2002.
Citations aux pages 11, 40, 56, et 115.
- [20] Ch.-H. Chun. *Marangoni convection in a floating zone under reduced gravity*. J. Crystal Growth, **48** : 600–610, 1980.
Citation à la page 6.
- [21] A. Cröll, W. Müller-Sebert et R. Nitsche. *The critical marangoni number for the onset of time-dependent convection in silicon*. Mater. Res. Bull., **24**(8) : 995–1004, august 1989.
Citation à la page 7.
- [22] A. Cröll, W. Müller-Sebert, K.W. Benz et R. Nitsche. *Natural and thermocapillary convection in partially confined silicon melt zones*. Microgravity Sci. Technol., **3** : 204, 1991.
Citation à la page 7.
- [23] A. Cröll, P. Dold et K.W. Benz. *Segregation in Si floating-zone crystals grown under microgravity and in a magnetic field*. J. Crystal Growth, **137** : 95–101, 1994.
Citation à la page 6.
- [24] A. Cröll, Th. Kaiser, M. Schweizer, A.N. Danilewsky, S. Lauer, A. Tegetmeier et K.W. Benz. *Floating-zone and floating-solution-zone of GaSb under microgravity*. J. Crystal Growth, **191** : 365–376, 1998.
Citations aux pages v, 3, 4, 6, et 7.
- [25] A. Cröll, F.R. Szofran, P. Dold, K.W. Benz et S.L. Lehoczky. *Floating-zone growth of silicon in magnetic fields : II. Strong static axial fields*. J. Crystal Growth, **183** : 554–563, 1998.
Citations aux pages 6 et 12.
- [26] A. Cröll et K.W. Benz. *Static magnetic fields in semiconductor floating-zone growth*. Prog. Cryst. Growth Ch., **38** : 133–159, 1999.
Citations aux pages 5 et 11.
- [27] P. Dold, A. Cröll et K.W. Benz. *Floating-zone growth of silicon in magnetic fields : I. Weak static axial fields*. J. Crystal Growth, **183** : 545–553, 1998.
Citations aux pages 6 et 12.
- [28] P. Dold, A. Cröll, M. Lichtensteiger, Th. Kaiser et K.W. Benz. *Floating-zone growth of silicon in magnetic fields : IV. Rotating magnetic fields*. J. Crystal Growth, **231** : 95–106, 2001.
Citation à la page 6.
- [29] P. Dold, M. Heidler, A. Drevermann et G. Zimmermann. *In situ observation of growth interfaces by ultrasound*. J. Crystal Growth, **256** : 352–360, 2003.
Citation à la page 5.

- [30] A. Eyer, H. Leiste et R. Nitsche. *Floating zone growth of silicon under microgravity in a sounding rocket*. J. Crystal Growth, **71** : 173–182, 1985.
Citation à la page 4.
- [31] R. Fjörtøft. *Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex*. Geofys. Publ., Oslo, **17**(6) : 1–52, 1950.
Citations aux pages 14, 53, 58, 133, et 135.
- [32] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, Père et Fils, Paris, 1822.
Citation à la page 97.
- [33] W.W. Fowles et G.O. Roberts. *Confinement of thermocapillary floating zone flow by uniform rotation*. J. Crystal Growth, **74** : 301–320, 1986.
Citation à la page 6.
- [34] E. Gadoin et P. Le Quéré. *Characterization of unstable modes in partitioned cavities*. In Lee JS, editor, *Heat Transfert 1998 : Proceedings of the 11th International Heat Transfert Conference*, volume 3, pages 429–434, Kyongju, Korea, august 1998. Korean Society of Mechanical Engineers.
Citation à la page 103.
- [35] E. Gadoin, P. Le Quéré et O. Daube. *A general methodology for investigating flow instabilities in complex geometries : application to natural convection in enclosures*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, **37** : 175–208, 2001.
Citation à la page 103.
- [36] M.B. Giles et N.A. Pierce. *Adjoint equations in CFD : duality, boundary conditions and solution behaviour*. AIAA Paper 97-1850, 1997.
Citation à la page 103.
- [37] M.B. Giles et N.A. Pierce. *An introduction to the adjoint approach to design*. Flow, Turbulence and Combustion, **65** : 393–415, 2000.
Citations aux pages 103, 105, et 106.
- [38] R.N. Grugel, C.P. Lee, A.V. Anilkumar, T.G. Wang, X.F. Shen, A. Cröll et A. Bune. *Promoting micro-structural uniformity during floating-zone crystal growth*. Adv. Space Res., **24**(10) : 1195–1198, 1999.
Citation à la page 7.
- [39] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, 2001.
Citation à la page 139.
- [40] P. Haldenwang, G. Labrosse, S. Abboudi et M. Deville. *Chebyshev 3-D spectral and 2-D pseudospectral solvers for the Helmholtz equation*. J. Comput. Phys., **55** : 115–128, 1984.
Citation à la page 24.
- [41] M.C.G. Hall et D.G. Cacuci. *Sensitivity analysis of a radiative-convective model by the adjoint method*. J. Atm. Sci., **39** : 2038–2050, 1982.
Citation à la page 103.
- [42] D.C. Hill. *Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers*. J. Fluid Mech., **292** : 183–204, 1995.
Citation à la page 103.
- [43] B.C. Houchens et J.S. Walker. *Comparison of the Half-zone and the laterally Heated Full-zone Instability Mechanisms*. Number AIAA 1313 in 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, 6-9 january 2003.
Citations aux pages 80, 81, et 95.
- [44] W.R. Hu, J.Z. Shu R. Zhou et Z.M. Tang. *Influence of liquid bridge volume on the onset of oscillation in floating zone convection I. Experiments*. J. Crystal Growth, **142** : 379–384, 1994.
Citation à la page 9.
- [45] D.T.J. Hurle, E. Jakeman et E.R. Pike. *Striated solute distributions produced by temperature oscillations during crystal growth from the melt*. J. Crystal Growth, **3-4** : 633–640, 1968.
Citation à la page 4.

- [46] Y. Inatomi, P. Dold, A.N. Danilewsky et K.W. Benz. *In situ observation setup for semiconductor growth interface from solution in a magnetic field*. Cryst. Res. Technol., **32**(6) : 759, 1997.
Citation à la page 5.
- [47] Th. Kaiser et K.W. Benz. *Floating-Zone growth of silicon in magnetic fields : III. Numerical simulation*. J. Crystal Growth, **183** : 564–572, 1998.
Citation à la page 11.
- [48] Y. Kamotani, S. Ostrach et M. Vargas. *Oscillatory thermocapillary convection in a simulated floating-zone configuration*. J. Crystal Growth, **66** : 83–90, 1984.
Citation à la page 10.
- [49] G. Kasperski et G. Labrosse. *On the numerical treatment of viscous singularities in wall confined thermocapillary convection*. Phys. Fluids, **12**(11) : 2695–2697, november 2000.
Citation à la page 11.
- [50] G. Kasperski, A. Batoul et G. Labrosse. *Up to the unsteadiness of axisymmetric thermocapillary flows in a laterally heated liquid bridge*. Phys. Fluids, **12**(1) : 103–119, january 2000.
Citations aux pages 11, 41, et 47.
- [51] G. Kasperski. *Convection thermocapillaire bidimensionnelle en pont liquide chauffé latéralement*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI, jan. 1999.
Citations aux pages 1, 12, 13, 15, 17, 40, 44, et 155.
- [52] K. Kitamura, S. Kimura et S. Hosoya. *The interface shapes of some oxide materials grown by the floating zone method*. J. Crystal Growth, **48** : 469–472, 1980.
Citation à la page 5.
- [53] N. Kobayashi. *Computer simulation of the steady flow in a cylindrical floating zone under low gravity*. J. Crystal Growth, **66** : 63–72, 1984.
Citation à la page 11.
- [54] Y. Kodama, Y. Nakanishi, N. Yoshimoto et M. Yoshizawa. *Electric and structural properties of single crystal $\text{La}_{0.95}\text{Sr}_{2.05}\text{Mn}_2\text{O}_7$* . Physica B, **329-333** : 815–816, 2001.
Citation à la page 4.
- [55] H.C. Kuhlmann et Ch. Nienhüser. *Dynamic free-surface deformation in thermocapillary liquid bridges*. Fluid Dyn. Res., **31** : 103–127, 2002.
Citations aux pages 10 et 13.
- [56] H.C. Kuhlmann. *Thermocapillary Convection in Models of Crystal Growth*, volume 152 of *Spinger Tracts in Modern Physics*. Spinger, 1999.
Citations aux pages 28 et 37.
- [57] E. Lifchitz L. Landau. *Mécanique des Fluides*. Mir, 1989.
Citation à la page 139.
- [58] C.W. Lan, M.C. Su et M.C. Liang. *A visualization and computational study of horizontal Bridgman crystal growth*. J. Crystal Growth, **208** : 717–725, 2000.
Citations aux pages 5 et 12.
- [59] C.W. Lan et J.H. Chian. *Three-dimensional simulation of Marangoni flow an interfaces in floating-zone silicon crystal growth*. J. Crystal Growth, **230** : 172–180, 2001.
Citation à la page 12.
- [60] C.W. Lan et B.C. Yeh. *Three-dimensional simulation of heat flow, segregation, and zone shape in floating-zone silicon growth under axial and transversal magnetic fields*. J. Crystal Growth, **262** : 59–71, 2004.
Citation à la page 12.
- [61] M. Lappa, R. Savino et R.Monti. *Three-dimensionnal numerical simulation of Marangoni instabilities in non-cylindrical liquid bridges in microgravity*. Int. J. Heat Mass Tranfert, **44** : 1983–2003, 2001.
Citations aux pages 9 et 10.
- [62] M. Lappa. *Three-dimensionnal numerical simulation of Marangoni flow instabilities in floating zones laterally heated by an equatorial ring*. Phys. Fluids, **15**(3) : 776–789, march 2003.
Citation à la page 12.

- [63] M. Lappa. *Combined effect of volume and gravity on the three-dimensional flow instability in noncylindrical floating zones heated by an equatorial ring*. Phys. Fluids, **16**(2) : 331–343, february 2004.
Citation à la page 12.
- [64] F.X. Le Dimet et O. Talagrand. *Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects*. Tellus, **38A** : 97–110, 1986.
Citation à la page 103.
- [65] Y.-C. Lee et J.-C. Chen. *The effects of temperature distribution on the barium titanate crystal growth in an LHPG system*. Opt. Materials, **12** : 83–91, 1999.
Citation à la page 4.
- [66] M. Levenstam et G. Amberg. *Hydrodynamical instabilities of thermocapillary flow in a half-zone*. J. Fluid Mech., **297** : 357–372, 1995.
Citations aux pages 8, 9, 14, 83, 89, 95, 97, et 98.
- [67] M. Levenstam, G. Amberg et C. Winkler. *Instabilities of thermocapillary convection in a half-zone at intermediate Prandtl numbers*. Phys. Fluids, **13**(4) : 807–816, april 2001.
Citations aux pages 10 et 60.
- [68] J. Leyppoldt, H.C. Kuhlmann et H.J. Rath. *Three-dimensional numerical simulation of thermocapillary flows in cylindrical liquid bridges*. J. Fluid Mech., **414** : 285–314, 2000.
Citations aux pages 10 et 100.
- [69] A. Lifschitz et E. Hameiri. *Local stability conditions in fluids dynamics*. Phys. Fluids, **3**(11) : 2644–2651, 1991.
Citation à la page 136.
- [70] P. Luchini et A. Bottaro. *Görtler vortices : a backward-in-time approach to the receptivity problem*. J. Fluid Mech., **363** : 1–23, 1998.
Citation à la page 103.
- [71] P. Luchini et A. Bottaro. *Linear stability and receptivity analyses of the Stokes layer produced by an impulsively started plate*. Phys. Fluids, **13**(6) : 1668–1678, june 2001.
Citation à la page 103.
- [72] A. Maljuk, J. Stremper et C.T. Lin. *Floating Zone growth and characterization of Ca₂Fe₂O₅*. J. Crystal Growth, **258** : 435–440, 2003.
Citation à la page 4.
- [73] C.K. Mamun et L.S. Tuckerman. *Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow*. Phys. Fluids, **7**(1) : 80–91, january 1995.
Citations aux pages 37 et 155.
- [74] C.G.M. Marangoni. *Sull' espansione dell goccie di un liquido galleggianti sulla superficie di altro liquido*. Tipographia dei fratelli Fusi, Pavia, 1865.
Citation à la page 16.
- [75] J. Masud, Y. Kamotani et S. Ostrach. *Oscillatory thermocapillary flow in cylindrical columns of high prandtl number fluids*. J. Thermophysics Heat Transfer, **11**(1) : 285–314, january-march 1997.
Citations aux pages 7 et 9.
- [76] K.A. Muehlner, M.F. Schatz, V. Petrov, W.D. McCormick, J.B. Swift et H.L. Swinney. *Observation of helical traveling-wave convection in a liquid bridge*. Phys. Fluids, **9**(6) : 1850–1852, june 1997.
Citations aux pages 9 et 100.
- [77] G. Müller et R. Rupp. *The role of Marangoni convection in the growth of GaAs crystals by the floating zone technique under microgravity*. Cryst. Properties Preparation, **35** : 138–154, 1991.
Citation à la page 7.
- [78] S. Müller. *Siliciumreinigung durch tiegfrees Zonenschmelzen*. Z. Naturforsch, **9b** : 504–505, 1954.
Citation à la page 2.
- [79] M. Navier. *Mémoire sur les Lois du Mouvemnt des Fluides*. Mém. Acad. R. Sci. Inst. France, **6** : 369–440, 1827.
Citation à la page 17.

- [80] C. Nienhüser et H.C. Kuhlmann. *Stability of the thermocapillary flows in non-cylindrical liquid bridges*. J. Fluid Mech., **458** : 35–73, 2002.
Citations aux pages 10, 35, et 84.
- [81] S. Ostrach, Y. Kamotani et C.L. Lai. *Oscillatory thermocapillary flows*. PhysicoChem. Hydrodyn., **6** : 585–599, 1985.
Citation à la page 10.
- [82] R. Peyret. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Number 148 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 2002.
Citations aux pages 23 et 143.
- [83] W.G. Pfann. *Principles of zone-melting*. J. Met. Trans. AIME, (194) : 747–753, 1952.
Citation à la page 2.
- [84] F. Preisser, D. Schwabe et A. Scharmann. *Steady and oscillatory thermocapillary convection in liquid columns with free cylindrical surface*. J. Fluid Mech., **125** : 545–567, 1983.
Citations aux pages 5, 7, 8, 11, et 100.
- [85] F. Rabier, P. Couturier et O. Talagrand. *An application of adjoint models to sensitivity analysis*. Beitr. Phys. Atmosph., **65**(3) : 177–192, 1992.
Citation à la page 103.
- [86] G. Raming, A. Muižnieks et A. Mühlbauer. *Numerical investigation of the influence of EM-fields on fluid motion and resistivity distribution during floating-zone growth of large silicon single crystals*. J. Crystal Growth, **230** : 108–117, 2001.
Citation à la page 12.
- [87] G. Ratnieks, A. Muižnieks, A. Mühlbauer et G. Raming. *Numerical 3D study of FZ growth : dependence on growth parameters and melt instability*. J. Crystal Growth, **230** : 48–56, 2001.
Citations aux pages v, 3, 4, et 12.
- [88] G. Ratnieks, A. Muižnieks et A. Mühlbauer. *Modelling of phase boundaries for large industrial FZ silicon crystal growth with the needle-eye technique*. J. Crystal Growth, **255** : 227–240, 2003.
Citation à la page 12.
- [89] P.H. Roberts. *Characteristic value problems posed by differential equations arising in hydrodynamics and hydromagnetics*. J. Math. Analysis and Applications, **1** : 195–214, 1960.
Citation à la page 105.
- [90] A. Rudevičs, A. Muižnieks, G. Ratnieks, A. Mühlbauer et Th. Wetzel. *Numerical study of transient behaviour of molten zone during industrial FZ process for large silicon crystal growth*. J. Crystal Growth, **266** : 54–59, 2004.
Citation à la page 12.
- [91] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 1996.
Citation à la page 155.
- [92] H.J. Scheel. *Historical aspects of crystal growth technology*. J. Crystal Growth, **211** : 1–12, 2000.
Citation à la page 2.
- [93] D. Schwabe, A. Scharmann, F. Preisser et R. Oeder. *Experiments on surface tension driven flow in floating zone melting*. J. Crystal Growth, **43** : 305–312, 1978.
Citation à la page 4.
- [94] M. Schweizer, A. Cröll, P. Dold, Th. Kaiser, M. Lichtensteiger et K. W. Benz. *Measurement of temperature fluctuations and microscopic growth rates in a silicon floating zone under microgravity*. J. Crystal Growth, **203** : 500–510, 1999.
Citations aux pages 4 et 5.
- [95] V.M. Shevtsova, M. Mojahed et J.C. Legros. *The loss of stability in ground based experiments in liquid bridges*. Acta Astronautica, **44**(7-12) : 625–634, 1999.
Citation à la page 12.

- [96] V.M. Shevtsova, D.E. Melnikov et J.C. Legros. *Three-dimensional simulations of hydrodynamic instability in liquid bridges : Influence of temperature-dependent viscosity*. Phys. Fluids, **13**(10) : 2851–2865, october 2001.
Citations aux pages 9 et 100.
- [97] J. Shiomi et G. Amberg. *Active control of a global thermocapillary instability*. Phys. Fluids, **14**(9) : 3039–3045, 2002.
Citations aux pages 133 et 136.
- [98] J. Shiomi, M. Kudo, I. Ueno, H. Kawamura et G. Amberg. *Feedback control of oscillatory thermocapillary convection in a half-zone liquid bridge*. J. Fluid Mech., **496** : 193–211, 2003.
Citations aux pages 134 et 136.
- [99] M.K. Smith et S.H. Davis. *Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities*. J. Fluid Mech., **132** : 119–144, 1983.
Citations aux pages 65, 69, 76, et 95.
- [100] G.G. Stokes. *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*. Cambridge Philos. Trans, **9** : 8–106, 1851.
Citation à la page 17.
- [101] M. Sumiji, S. Nakamura, T. azami et T. Hibaya. *Optical observation of solid-melt interface fluctuation due to Marangoni flow in a silicon liquid bridge*. J. Crystal Growth, **223** : 503–511, 2001.
Citation à la page 5.
- [102] M. Sumiji, S. Nakamura et T. Hibaya. *Two-directional observation of solid-melt interface fluctuation induced by Marangoni flow in a silicon liquid bridge*. J. Crystal Growth, **235** : 55–59, 2002.
Citation à la page 5.
- [103] L.B.S. Sumner, G.P. Neitzel, J.P. Fontaine et P. Dell’Aversana. *Oscillatory thermocapillary convection in liquid bridges with highly deformed free surfaces : Experiments and energy-stability analysis*. Phys. Fluids, **13**(1) : 107–120, january 2001.
Citation à la page 9.
- [104] K. Takagi, M. Otaka, H. Natsui, T. Arai, S. Yoda, Z. Yuan, K. Mukai, S. Yasuhiro et N. Imaishi. *Experimental study on transition to oscillatory thermocapillary flow in a low Prandtl number liquid bridge*. J. Crystal Growth, **233** : 399–407, 2001.
Citation à la page 7.
- [105] O. Talagrand et P. Courtier. *Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory*. Q. J. R. Meteorol. Soc., **113** : 1311–1328, 1987.
Citation à la page 103.
- [106] Z.M. Tang et W.R. Hu. *Influence of liquid bridge volume on the onset of oscillation in floating-zone convection. III. Three-dimensional model*. J. Crystal Growth, **207** : 239–246, 1999.
Citation à la page 9.
- [107] H.C. Theuerer. *US Patent No. 3,060,123, filed 17 December 1952, issued 23 October 1962*.
Citation à la page 2.
- [108] I. Ueno, S. Tanaka et H. Kawamura. *Oscillatory and chaotic thermocapillary convection in a half-zone liquid bridge*. Phys. Fluids, **15**(2) : 408–416, february 2003.
Citation à la page 7.
- [109] M. Wanschura, V.M. Shevtsova, H.C. Kuhlmann et H.J. Rath. *Convective instability mechanisms in thermocapillary liquid bridges*. Phys. Fluids, **7**(5) : 912–925, may 1995.
Citations aux pages v, vi, ix, 8, 9, 10, 13, 22, 37, 38, 39, 53, 60, 81, 83, 85, et 95.
- [110] S. Widnall et C.-Y. Tsai. *The instability of the thin vortex ring of constant vorticity*. Proc. R. Soc. Lond., **A**(255) : 273–305, 1977.
Citation à la page 9.
- [111] S. Xin et P. Le Quéré. *Linear stability analyses of natural convection flows in a differentially heated square cavity with conducting horizontal walls*. Phys. Fluids, **13**(9) : 2529–2542, september 2001.
Citation à la page 22.

- [112] J.-J. Xu et S.H. Davis. *Convective thermocapillary instabilities in liquid bridges*. Phys. Fluids, **27**(5) : 1102–1107, may 1984.
Citations aux pages 8 et 95.
- [113] Y.K. Yang et S. Kou. *Temperature oscillation in a tin liquid bridge and critical Marangoni number dependency on Prandtl number*. J. Crystal Growth, **222** : 135–143, 2001.
Citation à la page 7.
- [114] Z. Zeng, H. Mizuseki, K. Higashino et Y. Kawazoe. *Direct numerical simulation of oscillatory Marangoni convection in cylindrical liquid bridges*. J. Crystal Growth, **204** : 395–404, 1999.
Citations aux pages 97 et 98.
- [115] W. Zulehner. *Historical overview of silicon crystal pulling development*. Mater. Sci. End. B, **73** : 7–15, 2000.
Citation à la page 2.