Localisation des zones sensibles aux perturbations en zone flottante par la méthode de l'adjoint

Othman BOUIZI [*], **Claudine DANG VU-DELCARTE** [**]

LIMSI-CNRS
Bâtiments 508 et 502bis,
Université de Paris-Sud 91403 ORSAY
[*] othman.bouizi@limsi.fr
[**] delcarte@limsi.fr

Résumé - Le système adjoint des équations linéarisées autour de l'état stationnaire est utilisé pour déterminer les zones les plus sensibles aux perturbations d'un écoulement thermocapillaire en pont liquide.

Nomenclature

A	rapport d'aspect : $A = \dfrac{H}{R}$
R	rayon du cylindre
H	hauteur du cylindre
U	vitesse radiale
W	vitesse axiale
$\vec{U}$	vecteur vitesse
T	température

ρ	densité du fluide
λ	conductivité thermique du fluide
κ	diffusivité thermique du fluide
μ	viscosité dynamique
γ	coefficient de tension superficielle
$\delta\theta^*$	échelle de température
$(\vec{e}_r,\vec{e}_z)$	vecteurs de base
Pr	Nombre de Prandtl : $Pr = \dfrac{\mu}{\rho\kappa}$
Ma	Nombre de Marangoni : $\dfrac{\lvert\gamma\rvert R}{\mu\kappa}\delta\theta^*$

1. Introduction

La technique de zone fbttante est un proc´ed´e de croissance cristalline non contaminant qui permet d'obtenir des monocristaux de grande qualit´e, en g´en´eral de silicium. Un cylindre de mat´eriau polycristallin est en partie liqu´efi ´e par un chauffage lat´eral et se resolidifi e sur un germe de monocristal. La zone liquide, dite zone fbttante, est maintenue par capillarit´e. Des instabilit´es de l'´ecoulement thermocapillaire provoquent des d´efauts dans la structure monocristalline naissante que ce soit sur terre [1] ou en microgravit´e [2].

Dans des ´etudes num´eriques ant´erieures, à l'aide d'un modèle simplifi ´e bi-dimensionnel, diff´erents sc´enarii de bifurcations de l'´etat stationnaire, en gravit´e nulle [3] et dans un champ de gravit´e variant de la micro-gravit´e [4] à des champs intenses [5] ont ´et´e observ´es. Le but de ce travail est de localiser les zones de l'´ecoulement les plus sensibles aux perturbations thermiques par la m´ethode de l'adjoint.

Hill [6] a propos´e l'utilisation du système adjoint des ´equations lin´earis´ees autour de l'´etat stationnaire pour localiser la source des instabilit´es dans les problèmes de couches proches parois. Luchini et Bottaro [7] ont d´evelopp´e cette m´ethode pour les instabilit´es de Görtler non locales et pour l'analyse des couches de Stokes [8]. Ces ´etudes ont ´et´e effectu´ees en confi guration de système ouvert. Gadoin et al. [9] ont appliqué cette méthode pour des écoulements confinés dans une enceinte. La signification physique de l'adjoint a été abordée par Giles et Pierce [10] et, en partie, par Hill [6] dans le cas des équations de Navier-Stokes. L'originalité de notre configuration est qu'elle comporte une surface libre où se situe le moteur de l'écoulement.

2. Equations du système

La géométrie de la zone flottante est un cylindre de hauteur H et de rayon R (fig. 1). L'écoulement est supposé 2D axisymétrique. La surface latérale libre est supposée plane et indéformable, les fronts solides isothermes sont également plans. Un flux de chaleur latéral $Q(z)$ induit une inhomogénéité thermique de la surface libre, provoquant une variation de tension de surface et ainsi le mouvement du fluide. La gravité est supposée nulle.

Les équations de Navier-Stokes et de la chaleur, sous approximations de Boussinesq, décrivant l'évolution temporelle de la vitesse $\vec{U} = U\vec{e}_r + W\vec{e}_z$ et de la température T de l'écoulement s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t U + \left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\right)U & = & -\partial_r p + Pr\left(\Delta U - \dfrac{U}{r^2}\right) \\ \partial_t W + \left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\right)W & = & -\partial_z p + Pr\Delta W \\ \partial_t T + \left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\right)T & = & \Delta T \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{U} & = & 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Les échelles de longueur, température, vitesse, pression et temps choisies pour l'adimensionnement sont respectivement R, $\delta\theta^* = Q_0 R/\lambda$, $U^* = \kappa/R$, ρU^{*2}, et R/U^*. Les conditions aux limites sont ici :

$$z = \pm\frac{A}{2}\left\{\begin{array}{lcl} \vec{U} & = & \vec{0} \\ T & = & 0 \end{array}\right. \qquad\qquad r = 1\left\{\begin{array}{rcl} U & = & 0 \\ \partial_r W & = & -Ma f_n(z)\partial_z T \\ \partial_r T & = & Q(z) \end{array}\right. \tag{2}$$

$f_n(z)$ est une fonction de régularisation, dont l'objet sera discuté plus loin.

3. Equations linéarisées

Pour étudier la stabilité de l'écoulement stationnaire $\mathbb{U}_0 = \left(\vec{U}_0, T_0\right)$, obtenu par la résolution des équations (1) et (2) stationnaires par une méthode de Newton ([11], [5]), nous utilisons une méthode d'Arnoldi ([11], [5]) afin d'obtenir le mode propre de valeur propre dominante du système linéarisé autour de $\mathbb{U}_0$.

Les équations décrivant le comportement d'une perturbation $\mathbb{u} = (\vec{u}, \theta)$ de $\mathbb{U}_0$ s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t u + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)U_0 + \left(\vec{U}_0\cdot\vec{\nabla}\right)u & = & -\partial_r p + Pr\left(\Delta u - \dfrac{u}{r^2}\right) \\ \partial_t w + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)W_0 + \left(\vec{U}_0\cdot\vec{\nabla}\right)w & = & -\partial_z p + Pr\Delta w \\ \partial_t \theta + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)T_0 + \left(\vec{U}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\theta & = & \Delta\theta \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u} & = & 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

avec pour conditions aux limites :

$$z = \pm\frac{A}{2} \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{u} & = & \vec{0} \\ \theta & = & 0 \end{array} \right. \qquad\qquad r = 1 \left\{ \begin{array}{rcl} u & = & 0 \\ \partial_r w & = & -Maf_n(z)\partial_z\theta \\ \partial_r\theta & = & 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Une perturbation propre $\mathbb{u}_i = (\vec{u}_i,\theta_i)$ du système est telle que $\partial_t \mathbb{u}_i|_{\mathbb{U}_0} = \lambda_i \mathbb{u}_i$.

Le signe de la partie réelle de la valeur propre λ_i associée à ce mode propre nous renseigne sur la stabilité du système vis-à-vis de cette perturbation. Si la partie réelle de λ_i est strictement positive, alors l'écoulement est instable vis-à-vis de la perturbation $\mathbb{u}_i$; il est stable dans le cas contraire. En général, on ordonne les valeurs propres par partie réelle décroissante. Nous nous intéressons au mode propre dominant $(\mathbb{u}_1,\lambda_1)$ de valeur propre de partie réelle maximale.

4. Equations adjointes du système linéarisé

Considérons le produit scalaire $(\mathbb{u}_1,\mathbb{u}_2) = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_0^1 (u_1u_2 + w_1w_2 + \theta_1\theta_2)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$

L'opérateur $\partial_t|^*_{\mathbb{U}_0}$ tel que : $\left(\partial_t \mathbb{u}|_{\mathbb{U}_0}, \tilde{\mathbb{u}}\right) = \left(\mathbb{u}, \partial_t\tilde{\mathbb{u}}|^*_{\mathbb{U}_0}\right)$ est l'adjoint de $\partial_t|_{\mathbb{U}_0}$, les variables adjointes sont notées par un $\tilde{}$. Les équations adjointes obtenues en suivant la méthode de Hill [6] et Giles et Pierce [10] s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t\tilde{u} + \left(\vec{U}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\tilde{u} - \tilde{u}\partial_r U_0 - \tilde{w}\partial_r W_0 - \tilde{\theta}\partial_r T_0 & = & -\partial_r\tilde{p} - Pr\left(\Delta\tilde{u} - \dfrac{\tilde{u}}{r^2}\right) \\ \partial_t\tilde{w} + \left(\vec{U}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\tilde{w} - \tilde{u}\partial_z U_0 - \tilde{w}\partial_z W_0 - \tilde{\theta}\partial_z T_0 & = & -\partial_z\tilde{p} - Pr\Delta\tilde{w} \\ \partial_t\tilde{\theta} + \left(\vec{U}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\tilde{\theta} & = & -\Delta\tilde{\theta} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\tilde{u}} & = & 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

avec pour conditions aux limites :

$$z = \pm\frac{A}{2} \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\tilde{u}} & = & \vec{0} \\ \tilde{\theta} & = & 0 \end{array} \right. \qquad\qquad r = 1 \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{u} & = & 0 \\ \partial_r\tilde{w} & = & 0 \\ \partial_r\tilde{\theta} & = & PrMa\partial_z(\tilde{w}f_n(z)) \end{array} \right. \tag{6}$$

5. Méthodes numériques

La discrétisation spatiale des champs de vitesse et température se fait sur une base de polynômes de Chebyshev en utilisant des points de collocation de Gauss-Radau dans la direction radiale (r) et des points de Gauss-Lobatto dans la direction axiale (z). Le schéma temporel est du second ordre, implicite pour les termes diffusifs, explicite pour les autres. La pression est résolue en suivant une méthode de projection-diffusion [12]. Le flux de chaleur $Q(z)$ s'annule sur les fronts solides et a pour forme $Q(z) = \left(1 - z^2\right)^2$. Il existe une singularité de vorticité aux jonctions fronts solides/surface libre imposant l'utilisation d'une fonction de régularisation, ici $f_n(z) = (1 - z^{2n})^2$, pour y annuler la contrainte axiale.

6. Résultats

Les paramètres ont été fixés à : $Pr = 10^{-2}$, $Ma = 106$, $A = 2$, $n = 13$. Une grille de $N = 70 \times 100$ points a été utilisée. A ces paramètres, l'écoulement est tout juste instable (de valeur propre dominante $\lambda_1 = 1.7^{-4}$), une bifurcation fourche sous-critique ayant lieu à $Ma_c = 104.4$ [3]. La figure 2 présente l'écoulement stationnaire, la figure 3 le mode propre dominant.

Une perturbation ponctuelle, en espace et en temps, δT, et de même amplitude, est appliquée en différents endroits du champ de température stationnaire, matérialisés par des points sur tous les champs de températures. Nous supposerons que l'évolution de cette perturbation peut être décrite par :

$$\mathbb{U}(t) - \mathbb{U}_0 \approxeq \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{u}_i e^{\lambda_i t} \tag{7}$$

Le coefficient a_1 pour chaque perturbation (numérotée de 1 à 7) a été calculé. Plus ce coefficient est grand en valeur absolue, plus la perturbation du champ stationnaire est importante. Nous avons regroupé les résultats dans le tableau 1:

Perturbation	$\lvert a_1 \rvert$	$\lvert \tilde{\theta}_1 \rvert$
1	$1.00 \quad 10^{-1}$	$3.01 \quad 10^{-1}$
2	$1.79 \quad 10^{-1}$	$4.19 \quad 10^{-2}$
3	$5.09 \quad 10^{-2}$	$1.60 \quad 10^{-2}$
4	$2.65 \quad 10^{-2}$	$7.69 \quad 10^{-3}$
5	$1.61 \quad 10^{-2}$	$4.26 \quad 10^{-3}$
6	$1.61 \quad 10^{-2}$	$4.26 \quad 10^{-3}$
7	$6.26 \quad 10^{-3}$	$2.05 \quad 10^{-3}$

TAB. 1 – *Valeur absolue des coefficients de réponse, $|a_1|$, normalisés par le coefficient maximal et valeur absolue de $\tilde{\theta}_1$ au point de perturbation.*

Au regard de la figure 4, on constate que la réponse de l'écoulement en température est maximale pour une perturbation en température faite là où le premier mode propre adjoint, $\tilde{\theta}_1$, est maximum et que les amplitudes des autres réponses s'ordonnent par valeur décroissante des valeurs absolues de $\tilde{\theta}_1$.

7. Conclusion

Dans cette étude, nous avons montré que, dans le cas de convection thermocapillaire en pont liquide, une mesure de la sensibilité de l'écoulement à des perturbations ponctuelles en espace et en temps pouvait être obtenue par la valeur du mode adjoint. Une étude plus approfondie aura pour but d'établir une relation quantitative entre le coefficient a_1 et la valeur du mode propre adjoint à l'endroit où la perturbation est appliquée.

8. Remerciements

Nous remercions le Centre de Ressources Informatiques de l'Université Paris-Sud ainsi que l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS-CNRS).

9. Références

[1] D. Schwabe, A. Scharmann, F. Preisser, and R. Oeder, Experiments on surface tension driven fbw in fbating zone melting. J. Crystal Growth (43) (1978) 305–312.

[2] A. Cröll, Th. Kaiser, A.N. Danilewsky, S. Lauer, A. Tegetmeier, and K.W. Benz, Floating-zone and fbating-solution-zone of GaSb under microgravity. J. Crystal Growth (191) (1998) 365–376.

[3] E. Ch´enier, C. Delcarte, G. Kasperski, and G. Labrosse, Sensitivity of the liquid bridge hydrodynamics to local capillary contributions. Phys. Fluids 14(9) (2002) 3109–3117.

[4] E. Ch´enier, C. Delcarte, and G. Labrosse. Stability of buoyant capillary fbws in liquid bridge. In S. Dost, H. Struchtrup, and I. Dincer, editors, Progress in Transport Phenomena 59–62, University of Victoria, Canada, (2002). Elsevier, Paris.

[5] E. Ch´enier, C. Delcarte, and G. Labrosse, Stability of the axisymmetric buoyant-capillary fbws in a laterally heated liquid bidge. Phys. Fluids 11(3) (1999) 527–541.

[6] D.C. Hill, Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers. J. Fluid Mech. 292 (1995) 183–204.

[7] P. Luchini and A. Bottaro, Görtler vortices: a backward-in-time approach to the receptivity problem. J. Fluid Mech. 363 (1998) 1–23.

[8] P. Luchini and A. Bottaro, Linear stability and receptivity analyses of the Stokes layer produced by an impulsively started plate. Phys. Fluids 13(6) (2001) 1668–1678.

[9] E. Gadoin, P. Le Qu´er´e, and O. Daube, A general methodology for investigating fbw instabilities in complex geometries: application to natural convection in enclosures. Int. J. Numer. Meth. Fluids (37) (2001) 175–208.

[10] M.B. Giles and N.A. Pierce, An introduction to the adjoint approach to design. Flow, Turbulence and Combustion (65) (2000) 393–415.

[11] C.K. Mamun and L.S. Tuckerman, Asymmetry and hopf bifurcation in spherical Couette fbw. Phys. Fluids 7(1) (1995) 80–91.

[12] A. Batoul, H. Khallouf, and G. Labrosse, Une m´ethode de r´esolution directe (pseudos-pectrale) du problème de Stokes 2D/3D instationnaire. Application à la cavit´e entrain´ee carr´ee. C. R. Acad. Sci. IIb(319) (1994) 1455–1461.

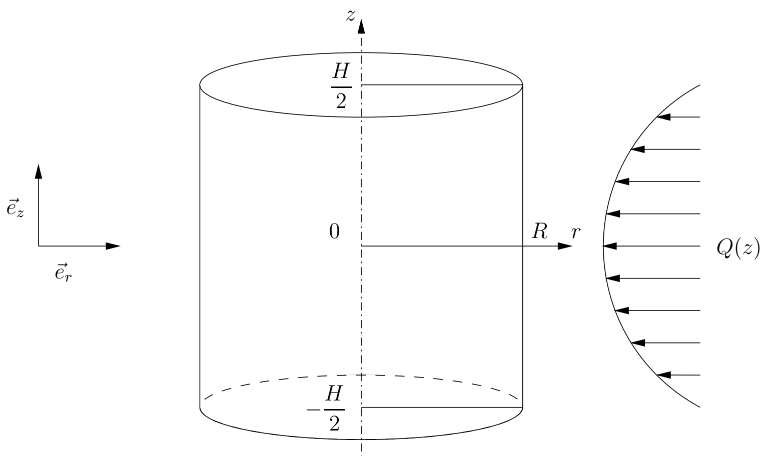
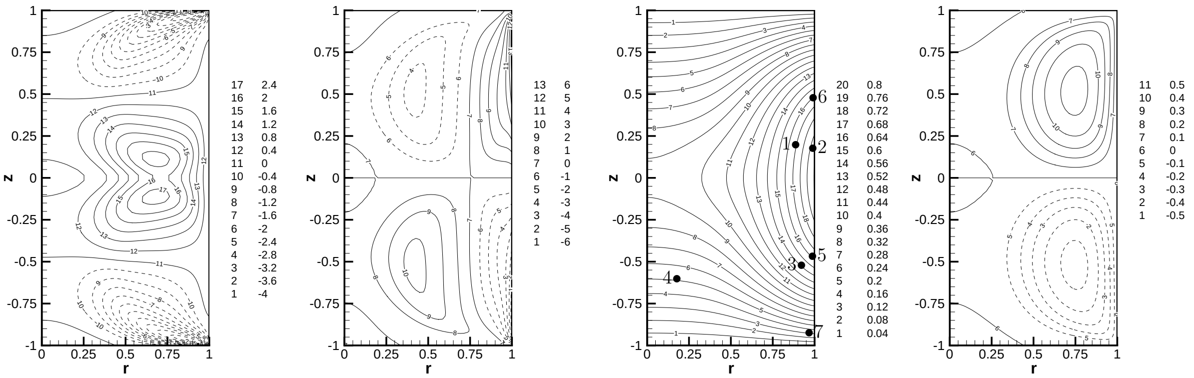
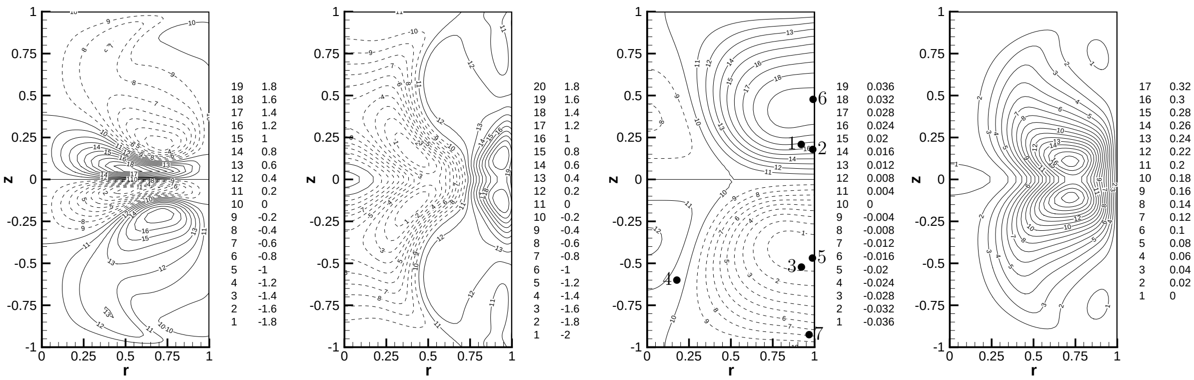


FIGURE 1 – *Configuration géométrique de la zone flottante*



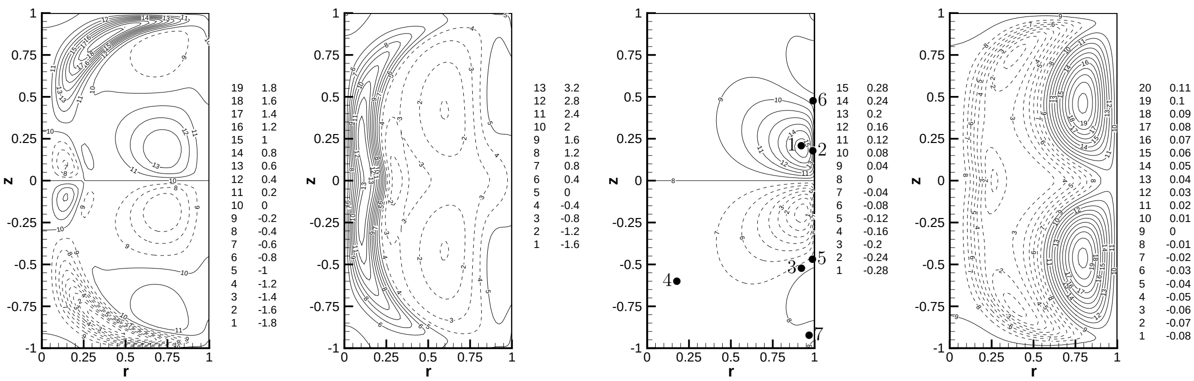
U_0 W_0 T_0 Ψ_0

FIGURE 2 – *Champ stationnaire* $\mathbb{U}_0$



u_1 w_1 θ_1 ψ_1

FIGURE 3 – *Premier mode propre de perturbation* $\mathbb{u}_1$



$\tilde{u}_1$ $\tilde{w}_1$ $\tilde{\theta}_1$ $\tilde{\psi}_1$

FIGURE 4 – *Premier mode propre de perturbation adjoint* $\tilde{\mathbb{u}}_1$