

Seuils de transition 2D/3D de la convection thermocapillaire en zone flottante

Othman Bouizi, Claudine Dang Vu-Delcarte & Guillaume Kasperski

Université de Paris-Sud XI, LIMSIS-CNRS

BP 133, 91403 ORSAY (France)

othman.bouizi@limsi.fr, delcarte@limsi.fr, kasperski@limsi.fr

Résumé :

Selon la valeur du nombre de Prandtl (inférieur à 1 dans cette étude), différents types de bifurcations (Hopf et fourche) de l'écoulement thermocapillaire stationnaire 2D en zone flottante sont observées pour des perturbations 2D et 3D. Les seuils de transition des perturbations 3D sont inférieurs à ceux résultant de perturbations axisymétriques.

Abstract :

Hopf and pitchfork bifurcations of the steady axisymmetric thermocapillary flow in a floating zone model, for 2D and 3D perturbations, are observed as a function of the Prandtl number (lower than 1 in this study). The transition thresholds are lower for 3D than for 2D perturbations.

Mots-clefs :

zone flottante ; bifurcation ; numérique

1 Introduction

La technique de la zone flottante est un procédé de croissance cristalline non contaminant qui permet d'obtenir des monocristaux de grande qualité. Un cylindre de matériau polycristallin est en partie liquéfié par un chauffage latéral. Cette zone liquide, la zone flottante, est maintenue par capillarité. Des instationnarités de l'écoulement peuvent provoquer des défauts dans la structure monocristalline naissante. Un nombre important d'études numériques (Neitzel *et al.* (1993), Levenstam et Amberg (1995), Wanschura *et al.* (1995), Chen *et al.* (1997), Kuhlmann (1999), Imaishi *et al.* (2001)) ont porté sur la configuration dite de la "demi-zone", modèle présupposant la symétrie de l'écoulement, hors gravité, par rapport au plan médian de la zone complète. Ce modèle est étudié comme modèle académique. L'écoulement axisymétrique est dans ce cas monocellulaire entre deux plans solides sur lesquels il y a adhérence du fluide, alors que dans la zone flottante entière, l'écoulement comporte deux cellules contrarotatives qui ne subissent chacune que l'influence d'un front solide. La zone flottante entière a été beaucoup moins étudiée que la demi-zone. Notre modèle ne tient pas compte des changements de phases et des déformations de la surface libre. Un certain nombre de nos travaux ont traité de ce sujet (Chénier *et al.* (1998), Chénier *et al.* (1999), Kasperski *et al.* (2000), Chénier *et al.* (2002)). Un résultat important de ces recherches est la mise en évidence de solutions multiples dont certaines brisent la symétrie haut/bas. Dans ce travail, nous étudions les perturbations de l'état stationnaire 2D par modes 2D et 3D en fonction des nombres de Prandtl (inférieur à 1) et de Marangoni.

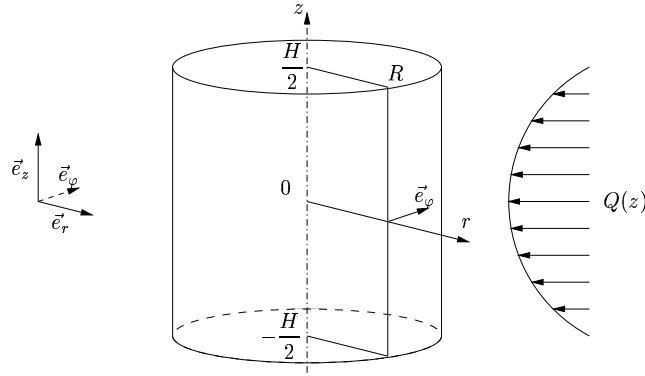


FIG. 1 – Configuration géométrique de la zone flottante

2 Formulation du problème

La zone flottante est modélisée par un cylindre de hauteur H et de rayon R (fig. 1). Les parois solides sont supposées planes et la surface latérale libre, indéformable, soumise à un flux de chaleur latéral $Q(z)$, symétrique par rapport au plan médian, qui induit une variation de tension de surface, génératrice du mouvement. Nous nous plaçons en gravité nulle. Les équations de Navier-Stokes et de la chaleur, sous approximations de Boussinesq, décrivant l'évolution temporelle de la vitesse $\vec{U} = U\vec{e}_r + W\vec{e}_z$ et de la température T de l'écoulement, ici considéré 2D axisymétrique, sous forme adimensionnelle, s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} + & = -\vec{\nabla} P + Pr \Delta \vec{U} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) T & = \Delta T \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U} & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Les échelles de longueur, température, vitesse, pression et temps choisies pour l'adimensionnement sont respectivement R , $\delta\theta^* = Q_0 R / \lambda$, $U^* = \kappa / R$, ρU^{*2} , et R / U^* où Q_0 est le flux maximum, λ et κ , la conductivité et la diffusivité thermique du fluide. $Pr = \nu / \kappa$ est le nombre de Prandtl, ν étant la viscosité cinématique. Les conditions aux limites sont ici :

$$z = \pm \frac{A}{2} \begin{cases} \vec{U} = \vec{0} \\ T = 0 \end{cases} \quad r = 1 \begin{cases} U = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial r} = -Ma \frac{\partial T}{\partial z} f_n(z) \\ \frac{\partial T}{\partial r} = Q(z) \end{cases} \quad (2)$$

$A = H/R$ est le rapport d'aspect et $Ma = \frac{|\gamma|R}{\mu\kappa} \delta\theta^*$ le nombre de Marangoni, où γ est le coefficient de variation thermique de tension superficielle et μ la viscosité dynamique. $f_n(z)$ est une fonction de régularisation dont l'objet sera discuté plus loin. Nous représentons l'écoulement par le vecteur défini par $\mathbb{U} = (\vec{U}, T)$

3 Equations linéarisées

Pour connaître la stabilité de l'écoulement stationnaire, $\mathbb{U}_0 = (\vec{U}_0, T_0)$ obtenu par la résolution du système (1) et (2), nous recherchons les perturbations propres du système linéarisé. Le comportement d'une perturbation $\mathbb{u} = (\vec{u}, \theta)$, avec $\vec{u} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\varphi + w\vec{e}_z$, de l'écoulement \mathbb{U}_0 est décrit par les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 = -\vec{\nabla} p + Pr \Delta \vec{u} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \theta + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T_0 = \Delta \theta \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

avec pour conditions aux limites :

$$z = \pm \frac{A}{2} \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \\ \theta = 0 \end{cases} \quad r = 1 \begin{cases} u = 0 & \frac{\partial w}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial z} f_n(z) \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -Ma \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Les perturbations sont décomposées selon des modes de Fourier azimuthaux bidimensionnels, et comme nous ne nous intéressons pas à la phase du mode le plus instable dans cette décomposition, nous ne considérons que les perturbations :

$$\mathbb{u}_k(r, z, \varphi) = \begin{pmatrix} u_k(r, z) \cos(k\varphi) \\ v_k(r, z) \sin(k\varphi) \\ w_k(r, z) \cos(k\varphi) \\ \theta_k(r, z) \cos(k\varphi) \end{pmatrix}$$

Une perturbation propre $\mathbb{u}_{k,i} = (\vec{u}_{k,i}, \theta_{k,i})$ du système est telle que $\left. \frac{\partial \mathbb{u}_{k,i}}{\partial t} \right|_{\mathbb{U}_0} = \lambda_{k,i} \mathbb{u}_{k,i}$.

Ordonnons les valeurs propres par partie réelle décroissante. Nous nous intéressons au mode propre dominant $(\mathbb{u}_{k,1}, \lambda_{k,1})$, de valeur propre de partie réelle maximale. Si la partie réelle de $\lambda_{k,1}$ est strictement positive, alors l'écoulement est instable, il est stable dans le cas contraire.

4 Méthodes numériques

Les champs de vitesse et de température sont discrétisés spatialement sur une base de polynômes de Chebyshev en utilisant des points de collocation de Gauss-Radau dans la direction radiale (r) et des points de Gauss-Lobatto dans la direction axiale (z). Le schéma temporel est du second ordre, implicite pour les termes linéaires, explicite pour les autres. La pression est résolue en suivant une méthode de projection-diffusion (Batoul *et al.* (1994)). Il existe une singularité de vorticité aux jonctions fronts solides/surface libre. Les méthodes spectrales gérant mal les singularités, ceci impose l'utilisation d'une fonction de régularisation pour annuler la contrainte axiale aux jonctions fronts solides/surface libre. La fonction de régularisation choisie est polynômiale : $f_n(z) = (1 - z^{2n})^2$ avec n entier.

Le champ stationnaire \mathcal{U}_0 est calculé par une méthode de Newton ; le mode propre dominant du système linéarisé (3, 4) est obtenu par une méthode d'Arnoldi (Mamun et Tuckerman (1995), Chénier *et al.* (1999))

5 Résultats

Nous avons étudié la stabilité de champs axisymétriques stationnaires obtenus par une méthode de continuation pour un paramètre de régularisation $n = 13$ et un rapport d'aspect $A = 1$. Le flux de chaleur dimensionnel a pour expression $Q(z) = Q_0 (1 - z^2)^2$. Cette étude de stabilité se fait vis-à-vis de modes 2D et 3D. Les seuils de transition sont présentés sur la figure 2. Pour $Pr < 3.2 \cdot 10^{-3}$, le mode 0 (courbe *b*)) déstabilise l'état stationnaire 2D via une

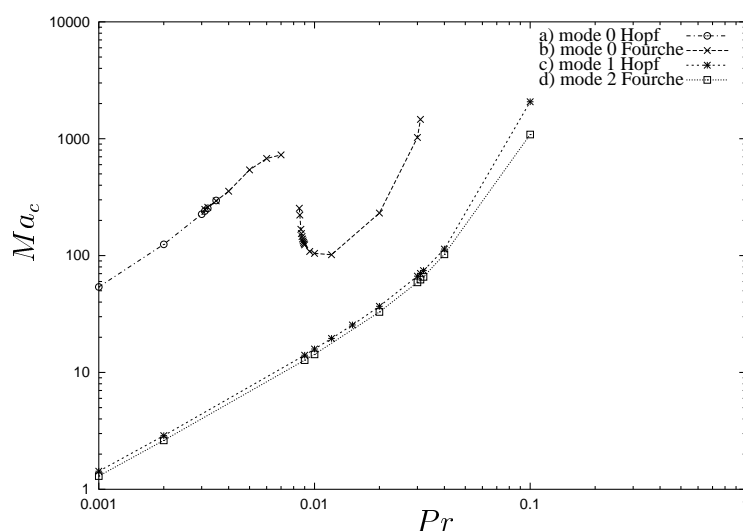


FIG. 2 – Diagramme de stabilité dans l'espace Pr - Ma

bifurcation de Hopf. La figure 3 donne les lignes de courant de l'état oscillant, sur une demi-période, à $Pr = 10^{-3}$, $Ma = 70$ (le seuil étant à $Ma = 1.298$).

Entre $Pr = 3.2 \cdot 10^{-3}$ et $Pr = 3.1 \cdot 10^{-2}$, une bifurcation fourche a été observée. Cette transition a été étudiée de façon approfondie à $Pr = 10^{-2}$ (Chénier *et al.* (2002)). Cette bifurcation du mode 0, brisant la symétrie haut/bas du problème, ne peut être observée en demi-zone. Les seuils s'étendent de $Ma = 293$ à $Ma = 1464$ en passant par un mini mum à $Ma = 101$ pour $Pr = 1.2 \cdot 10^{-2}$.

Cependant, ce sont des perturbations 3D qui déstabilisent les premières l'état stationnaire. Le mode 2 est toujours, sur le domaine étudié, le mode le plus déstabilisant. Comme indiqué sur la figure 2, la courbe des seuils de transition du mode 2 (*d*) se trouve en dessous de celle du mode 1 et du mode 0. Le mode 3 n'a pas été représenté, mais il n'est pas instable lorsque le champ stationnaire est déstabilisé par le mode 2. L'écoulement stationnaire \mathcal{U}_0 en $Pr = 10^{-3}$ et $Ma = 1.3$ est représenté sur la figure 4 et le mode propre $\mathcal{u}_{2,1}$ sur la figure 5.

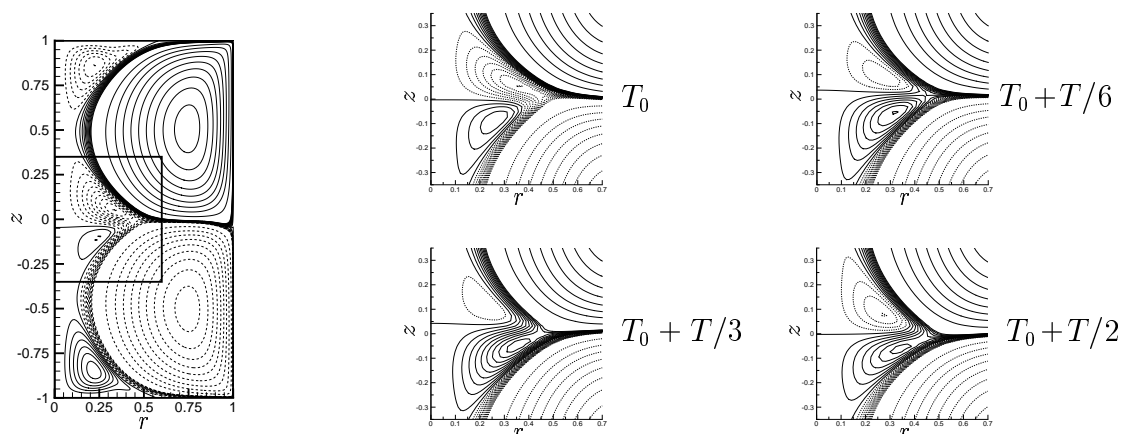


FIG. 3 – Etats successifs, sur une demi période $T/2$, de la fonction de courant du champ oscillant pour $Pr = 10^{-3}$ et $Ma = 70$

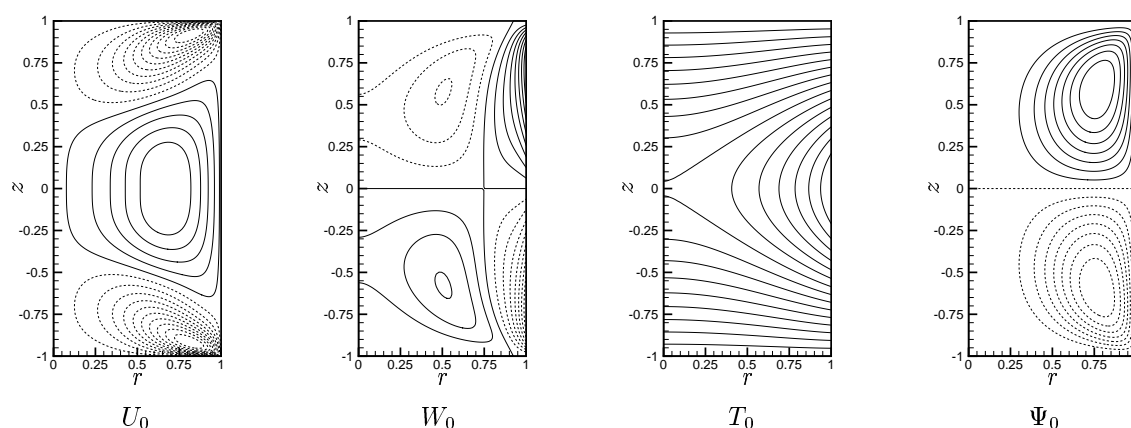


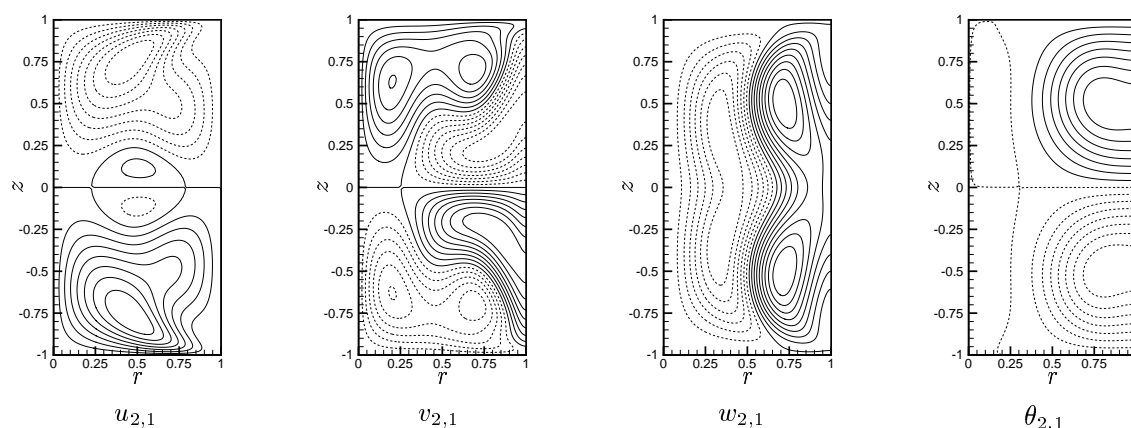
FIG. 4 – Champs stationnaires U_0 et fonction de courant à $Pr = 10^{-3}$ et $Ma = 1.3$

6 Conclusions et perspectives

Une étude de la stabilité de l'écoulement axisymétrique stationnaire de la zone flottante vis-à-vis de perturbations 2D et 3D a été menée pour de faibles nombres de Prandtl. La variété des déstabilisations 2D de la zone flottante, comparée aux résultats en demi-zone, laisse entrevoir la richesse des comportements de la zone complète. Les perturbations 3D étant les premières à se manifester, il est impératif d'effectuer des recherches sur la dynamique de l'écoulement 3D complet. Une autre voie d'étude est la caractérisation fine des instabilités et l'exploration de l'espace des paramètres vers les hauts nombres de Prandtl.

Remerciements

Nous tenons à remercier le Centre de Ressources Informatiques (CRI) de l'Université Paris-Sud ainsi que l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS-CNRS) pour la mise à disposition des moyens de calculs nécessaires à l'obtention de ces résultats et la disponibilité de leur personnel.

FIG. 5 – Mode propre $u_{2,1}$ en $Pr = 10^{-3}$ et $Ma = 1.3$

Références

- A. Batoul, H. Khallouf, and G. Labrosse. Une méthode de résolution directe (pseudospectrale) du problème de Stokes 2D/3D instationnaire. Application à la cavité entraînée carrée. *C. R. Acad. Sci.*, IIB(319) :1455–1461, 1994.
- G. Chen, A. Lizée, and B. Roux. Bifurcation analysis of the thermocapillary convection in cylindrical liquid bridges. *J. Crystal Growth*, (180) :638–647, 1997.
- E. Chénier, C. Delcarte, G. Kasperski, and G. Labrosse. Sensitivity of the liquid bridge hydrodynamics to local capillary contributions. *Phys. Fluids*, 14(9) :3109–3117, 2002.
- E. Chénier, C. Delcarte, and G. Labrosse. Solutions multiples thermocapillaires en zone flottante à gravité nulle. *Eur. Phys. J. AP*, (2) :93–97, 1998.
- E. Chénier, C. Delcarte, and G. Labrosse. Stability of the axisymmetric buoyant-capillarity flows in a laterally heated liquid bridge. *Phys. Fluids*, 12(3) :527–541, 1999.
- N. Imaishi, S. Yasuhiro, Y. Akiyama, and S. Yoda. Numerical simulation of oscillatory Marangoni flow in half-zone liquid bridge of low Prandtl number fluid. *J. Crystal Growth*, (230) :164–171, 2001.
- G. Kasperski, A. Batoul, and G. Labrosse. Up to the unsteadiness of axisymmetric thermocapillary flows in a laterally heated liquid bridge. *Phys. Fluids*, 12(1) :103–119, january 2000.
- H.C. Kuhlmann. *Thermocapillary convection in models of crystal growth*. Number 152 in Springer tracts in modern physics. 1999.
- M. Levenstam and G. Amberg. Hydrodynamical instabilities of thermocapillary flow in a half-zone. *J. Fluid Mech.*, 297 :357–372, 1995.
- C.K. Mamun and L.S. Tuckerman. Asymmetry and hopf bifurcation in spherical Couette flow. *Phys. Fluids*, 7(1) :80–91, january 1995.
- G.P. Neitzel, K.T. Chang, D.F. Jankowski, and H.D. Mittelman. Linear-stability theory of thermocapillary convection in a model of the float-zone crystal-growth process. *Phys. Fluids A*, 5(1) :108–113, january 1993.
- M. Wanschura, V.M. Shevtsova, H.C. Kuhlmann, and H.J. Rath. Convective instability mechanisms in thermocapillary liquid bridges. *Phys. Fluids*, 7(5) :912–925, may 1995.